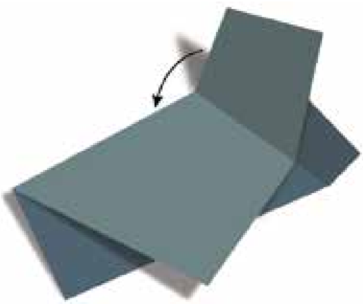
Николай Авилов

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАБАВЫ
с бумажным квадратом

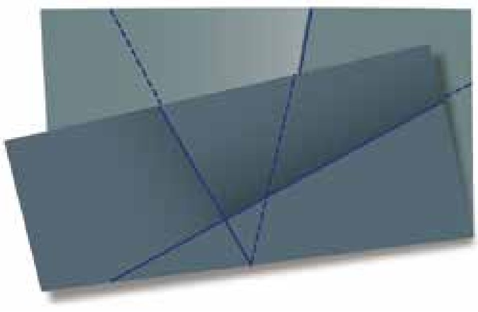
Бумажный квадрат – интересный объект для моделирования. Если перегнуть бумажный лист, а потом развернуть, на бумаге останется складка – фактически, мы провели на бумаге отрезок без помощи линейки. Перегибая бумажный квадрат, можно научиться откладывать отрезок, равный данному, отмечать середину отрезка, откладывать угол, равный данному, проводить биссектрису угла, строить перпендикулярные и параллельные отрезки и многое другое.

Такая игра с бумажным квадратом порождает своеобразную геометрию: роль прямых играют края бумажного квадрата и складки, возникающие при перегибах, а роль точек – вершины квадратного листа и точки пересечения складок между собой или с краями листа. Операции перегибания бумажного квадрата включают в себя всю геометрию одной линейки и даже позволяют использовать возможности циркуля, конечно, без проведения дуг окружности. Помимо проведения прямой через две точки, отметим два типа операций.

1. Перпендикуляры. Если мы сгибом квадрата совместим какие-то две точки, то получим срединный перпендикуляр между этими точками. А если сгибом квадрата наложим прямую на саму себя (рисунок справа), то получим перпендикуляр к этой прямой. При этом, выбирая место сгиба, мы можем провести перпендикуляр через любую данную точку.



2. Отражения. При сгибе по одной из прямых мы можем «обновить» все остальные сгибы, при этом соответствующие складки симметрично отразятся относительно первой прямой (добавятся складки по штриховым линиям на рисунке справа).



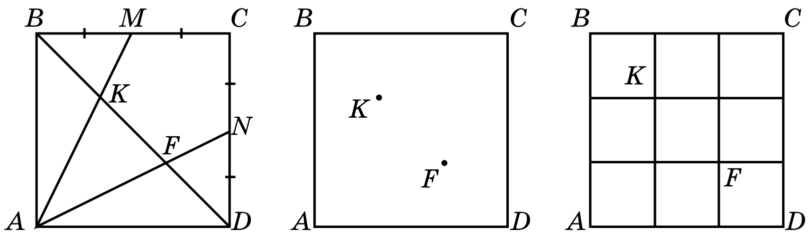
Запасёмся набором бумажных квадратов (в качестве таковых можно использовать бумагу для записей, которая продаётся в кубических блоках) и решим вместе несколько задач в качестве тренировки.

Пожалуй, самая простая задача – найти центр квадрата. Она легко решается проведением диагоналей квадрата – срединных перпендикуляров к парам противоположных вершин. Эту же задачу можно решить проведением срединных перпендикуляров к сторонам квадрата. Их точка пересечения будет центром бумажного квадрата. При этом бумажный квадрат окажется разделённым на 4 равных квадрата.

Попробуем разделить данный бумажный квадрат на 9 равных квадратов. В основе решения лежит красивая геометрическая задача.

Пусть M и N – середины сторон BC и CD. Оказывается, отрезки AM и AN делят диагональ BD квадрата $ABCD$ на три равные части: $BK = KF = FD$.

Попробуйте доказать этот факт самостоятельно, мы лишь подскажем, что помогут диагональ AC и свойство медиан треугольника.



Отсюда вытекает способ деления бумажного квадрата на 9 равных квадратов:

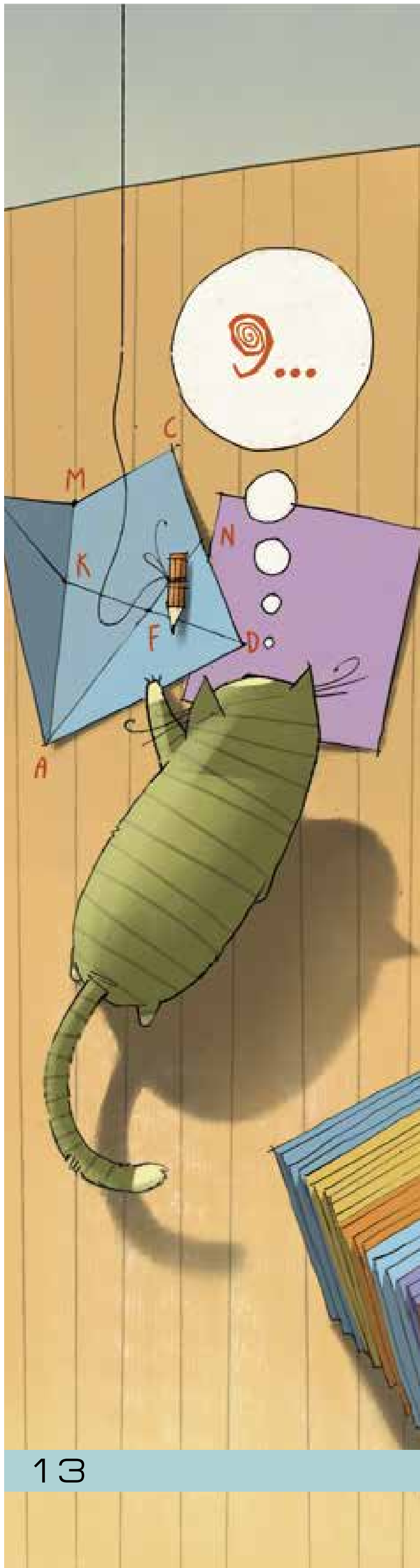
1) проведём диагональ BD;

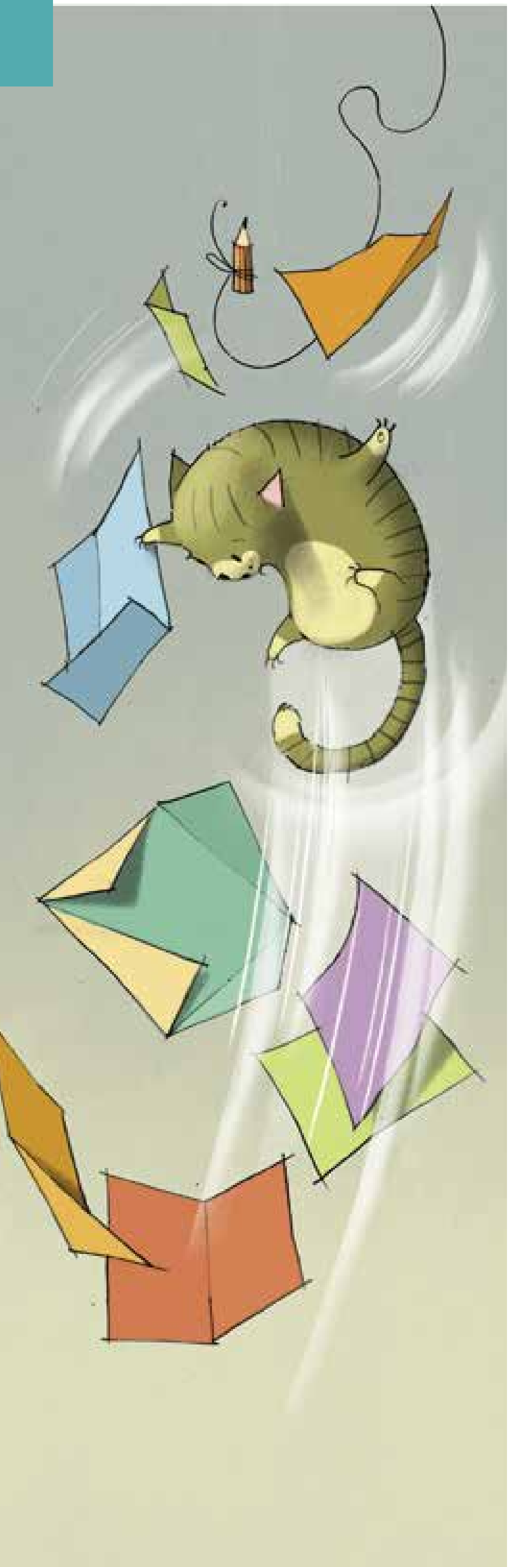
2) отметим середины M и N сторон BC и CD соответственно;

3) проведя прямые AM и AN, найдём точки K и F, делящие диагональ BD на три равных отрезка;

4) через точки K и F делаем перегибы, перпендикулярные соответствующим сторонам квадрата.

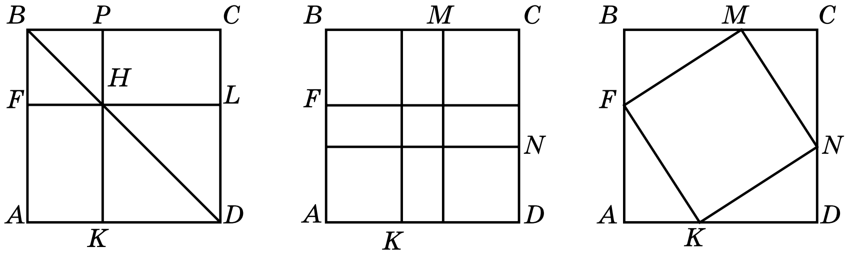
Чтобы вписать в данный бумажный квадрат другой квадрат, все вершины которого лежат на сторонах бумажного квадрата, нужно на краях бумажного квадрата найти четыре точки, равноудалённые от вершин углов. Сделать это можно так. Вначале перегнём лист



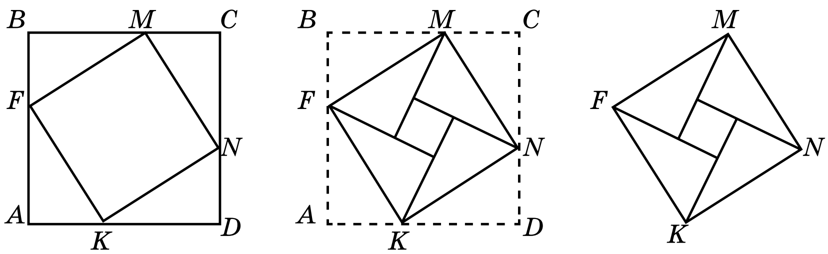


по диагонали BD, в верхней части листа проведём произвольный перпендикуляр FL к AB и отметим точку H их пересечения. Через точку H проведём перпендикуляр PK к FL. У нас получился квадрат $BPHF$, построенный при вершине B бумажного квадрата.

Далее, отразив относительно диагонали AC, получим четыре точки M, N, K и F, удалённые на одинаковое расстояние от вершин бумажного квадрата. Сделав перегибания FM, MN, NK и KF, получаем квадрат $MNKF$, вписанный в данный бумажный квадрат. (Точки M, N, K и F можно было получить и проще: найти центр бумажного квадрата и провести через него два взаимно перпендикулярных перегиба.)



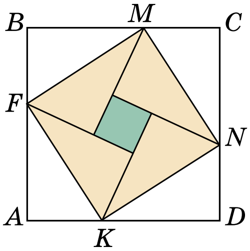
В полученном бумажном квадрате загнём внутрь четыре его угла. Мы получим квадрат $MNKF$, внутри которого находятся четыре прямоугольных треугольника, между которыми образовался маленький квадрат. Эта конфигурация в геометрии известна с давних времён: она использовалась для доказательства теоремы Пифагора. Древние индусы, не утруждая себя многословием, писали: «Смотри!». Они считали, что этого чертежа достаточно, чтобы обосновать утверждение: в любом прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Как же рассуждали древние индусы?



Пусть в прямоугольном треугольнике даны катеты a и b, для определённости $a \geqslant b$, и гипотенуза c, тогда площадь квадрата можно найти двумя способами.

Во-первых, она равна квадрату его стороны, то есть c^2, во-вторых, она равна сумме площадей четырёх прямоугольных треугольников с катетами a и b и площади внутреннего квадрата со стороной $a-b$. Поэтому верно равенство $c^2=4\cdot\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$. После упрощений получим $c^2=a^2+b^2$. Вот так неожиданно, с помощью квадратного листа, мы доказали знаменитую теорему.

Взглянем на эту конструкцию ещё раз. Она содержит три квадрата: исходный большой квадрат со стороной $a+b$, средний квадрат со стороной c и малый квадрат со стороной $a-b$. Не поленитесь, найдите среднее арифметическое площадей большого и малого квадратов. Думаю, что результат вас удивит.



Теперь попробуйте решить несколько задач самостоятельно. Помните, что в основе всех перегибаний лежат свойства геометрических фигур, которые нужно сначала увидеть, потом обосновать.

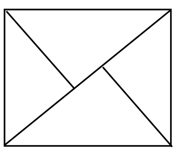
Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте угол 15°. *Указание*: вам потребуется новая операция, которая находит пересечение окружности данного радиуса с прямой.

2. Наложите два равных бумажных квадрата друг на друга так, чтобы одна их вершина была общей, а общая часть имела площадь, равную половине площади каждого квадрата.

3. Разделите бумажный квадрат на 25 равных квадратов.

4. Можно ли сложить бумажный квадрат в форме прямоугольного конверта, изображённого на рисунке справа? Уточним: без пробелов и наложений.



5. Сложите квадратный конверт с квадратным «окном», площадь которого составляет одну четвёртую часть площади исходного квадрата.

Художник Алексей Вайнер