НАШ КОНКУРС («Квантик» № 12, 2017)

16. *На острове три селения. В одном из них живут рыцари, в другом разбойники, в третьем торгаши. Рыцари всегда говорят правду, разбойники всегда лгут, а торгаши могут как сказать правду, так и солгать. Путешественник поговорил с тремя туземцами А, Б, В из трёх разных селений, не зная, кто откуда. Туземец А сказал, что Б рыцарь; Б сказал, что В разбойник; В сказал, что А торгаш. Солгал ли торгаш?*

Ответ: да, солгал. Если торгаш сказал правду, то про двух туземцев сказано правильно, поскольку рыцарь тоже сказал правду. Но тогда и про третьего сказано правильно. Получается, что лжец сказал правду, чего не может быть.

17. *На доске написано десятизначное число. Все его цифры различны. Может ли оказаться, что, вычеркнув две его последние цифры, получим число, делящееся на 2, вычеркнув три его последние цифры, получим число, делящееся на 3, ..., вычеркнув 9 его последних цифр, получим число, делящееся на 9?*

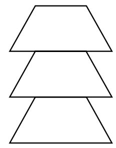
Ответ: нет, не может. Предположим, что условия про делимость выполняются. Вычеркнем из числа 9 последних цифр, останется только первая. Она делится на 9, значит, равна 9. Припишем к ней вторую цифру, получится число от 90 до 99. По условию оно должно делиться на 8, а такое число только одно, 96. Припишем третью цифру, получится число от 960 до 969. Только одно из них, 966, делится на 7. Значит, не все цифры различны, и такого быть не может.

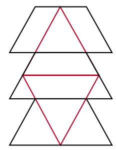
18. *На каждой клетке квадратной доски 10×10 стоит чёрная или белая фишка, причём всего тех и других поровну. Разрешается поменять местами две разноцветные фишки, стоящие рядом (в соседних по стороне клетках), или убрать с доски две одноцветные фишки, стоящие рядом. Верно ли, что всегда возможно убрать все фишки с доски, действуя по правилам, как бы фишки ни были расположены вначале?*

Ответ: да. По условию можно менять местами соседние фишки разного цвета. Обмен местами соседних фишек одного цвета ничего не меняет. Поэтому можно считать, что менять местами разрешается любые две соседние фишки.

Понятно, что тогда за несколько перестановок любую фишку можно поставить на любую клетку. Заполним верхнюю половину квадрата чёрными фишками (а нижнюю – белыми). После этого удалить все фишки не составит труда.

19. *Николаю Ивановичу – любителю занимательных задач – нравится наряжать игрушками-головоломками новогоднюю ёлку для внуков. Он приготовил из плотной бумаги правильный тетраэдр (треугольную пирамидку из равносторонних треугольников). Затем разрезал его хитрым способом и получил ёлочку (она составлена симметрично из трёх равных половинок правильного шестиугольника, см. рисунок вверху). Как ему это удалось?*





Свернём елочку по красным линиям (см. рисунок справа). Получим исходный тетраэдр.

20. *В школьном химическом кабинете имеются двухчашечные весы с набором из 20 гирек массами 1 г, 2 г, ..., 20 г. Коля разложил все эти гирьки по чашкам весов так, что они уравновесились. Петя хочет убрать часть гирек так, чтобы равновесие сохранилось. Какое наименьшее количество гирек ему потребуется снять, чтобы гарантированно добиться успеха (как бы ни были разложены гирьки по чашкам)?*

Одной гирькой Петя не обойдётся: чашка, с которой он снимет гирьку, станет легче. И двух гирек недостаточно: чашка, с которой будет снята более тяжёлая гирька, станет легче.

Докажем, что три гирьки Петя может снять всегда (сохранив равновесие), как бы Коля ни разложил их по весам. Заметим, что суммарная масса гирек равна $1+2+...+20=210$ г, и потому изначально суммарная масса гирек на каждой чашке равна $210:2=105$ г.

Предположим, гирьки разложены так, что Петя не может уравновесить весы снятием трёх гирек. Пусть гирька массой 1 г лежит, например, на левой чашке, и пусть k – масса следующей по величине гирьки на левой чаше. Заметим, что гирька массой $k+1$ лежит на левой чашке (иначе мы уравновесим её гирьками 1 и k), тогда и гирька массой $k+2$ – тоже, и т.д. Значит, на левой чашке лежат гирьки массами 1, k, $k+1$, ..., 20 г, а на правой – массами 2, 3, ..., $k-1$ г. Тогда $105=2+3+\ldots+(k-1)$. Но это невозможно: при $k\leqslant 15$ сумма не превосходит 104, а при $k>15$ сумма не меньше 119. Противоречие.

ЧЕРВОНЦЫ («Квантик» № 1, 2018)

Ясно, что особенной является одна из монет 37½ рубля и 25 рублей, потому что весят они одинаково, а достоинства у них разные. Так что надо понять, какая из них соответствует двум оставшимся, а для этого надо определить соотношение мер веса и номинала. Из сравнения монет 7½ рубля и 10 рублей ясно, что 2½ чеканятся из 43,56 доли золота, стало быть, 10 рублей – из 174,24 доли, то есть 1 золотник это 174,24 – 78,24 = 96 долей. Дальше можно действовать по-разному; чтобы не делить и умножать много дробей, давайте их складывать.

25 рублей = 2 × 7½ + 10 рублей = (переводим в вес) = (2 + 1) золотника (2 × 34,68 + 78,24) доли = 3 золотника 147,6 доли = 4 золотника 51,6 доли. Не сходится.

37½ рублей = 5 × 7½ = (переводим в вес) = = 5 золотников (5 × 34,68) доли = 5 золотников 173,4 долей = 6 золотников 77,4 доли. Сходится!

Итак, в старой стопе отчеканена монета в 25 рублей. Чтобы ответить на второй вопрос, разделим содержание золота в этой монете на то, которое должно было быть по новой стопе. (6 золотников 77,4 доли) / (4 золотника 51,6 доли) = = 653,4 доли / 435,6 доли = 1,5. Монета старой стопы оказалась в 1,5 раза тяжелее, чем надо было. Стало быть, реформа состояла в уменьшении золотого содержания рубля в полтора раза.

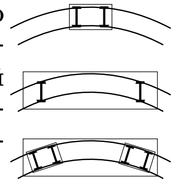
Примечание. Объясним, откуда взялись дополнительные номиналы «2½ империала» и «100 франков». Дело в том, что реформа проводилась в два этапа. В 1895 году была введена новая единица – империал, равная 10 старым рублям. В 1897 году её приравняли к 15 новым рублям. Так что на монете 1908 года указаны не новые, а старые рубли. А до того, ещё в 1886 году, содержание золота в (старом) рубле было выбрано с таким расчётом, что 5 рублей равнялось 20 французским франкам и приравненным к ним монетам Латинского монетного союза, существовавшего в Европе в конце XIX – начале XX веков (подробнее см. trv-science.ru/2017/08/29/predshestvennik-evro). Обе эти монеты были отчеканены очень небольшим тиражом и не имели широкого хождения, а использовались для подарков придворным.

XL ТУРНИР ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

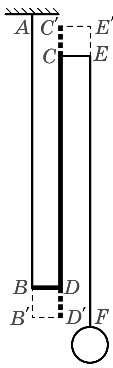
(«Квантик» № 1, 2018)

Физика

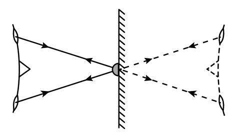
1. Современные железнодорожные вагоны значительно больше вагонов XIX века – и по длине, и, особенно в случае грузовых вагонов, по весу. Поэтому первая причина заключается в том, что нагрузку от более тяжёлого вагона требуется распределить на большее количество колёсных пар. Однако это не объясняет того, зачем четыре оси нужны в гораздо более лёгких пассажирских вагонах. Заметим, что двухосные вагоны с трудом могли проходить повороты (если бы между рельсами и колёсами не было зазора – не могли бы совсем, см. верхний рисунок). Сделать длинный вагон, оставив его двухосным, невозможно – он сойдёт с рельсов на первом же повороте, потому что оси его колёс окажутся не перпендикулярными рельсам (средний рисунок). Нижний рисунок объясняет, как наличие колёсных тележек решает эту проблему.



2. Нарисуем, как будет выглядеть подвес после теплового расширения, если его длина не изменилась. Точки A и F остаются на месте, а остальные точки переходят в штрихованные. Так как боковые стержни сделаны из одного и того же металла, их удлинения одинаковы – $BB' = EE'$. Тогда удлинение центрального стержня – $CC' + DD' = EE' + BB'$, то есть в два раза больше, чем удлинение каждого из боковых стержней.



3. Плоское зеркало даёт мнимое изображение предмета (в нашем случае, мальчика), расположенное симметрично относительно плоскости зеркала. Когда мальчик закрыл изображение зажмуренного левого глаза, его палец оказался ровно посредине между правым глазом и изображением левого, то есть напротив носа. Если теперь он зажмурит правый глаз и посмотрит левым, то в силу симметрии закрыто пальцем будет изображение правого глаза.



Астрономия

Представьте, что вы держите перед собой мяч и крутитесь равномерно, стоя на одном месте. Примерно как этот мяч, Луна вращается вокруг Земли: она обращена к Земле всегда одной и той же стороной. В любой точке этой стороны на лунном небе видна Земля, причём она висит в небе неподвижно (на земном небе таких «неподвижных» спутников, планет, звёзд не увидишь). С обратной стороны Луны Землю не видно. Казалось бы, тогда никаких восходов и заходов не может быть, но это только в такой упрощённой модели. Так как движение Луны отличается от модельного, то и Земля совсем немного, но движется по Лунному небу. Зайти за горизонт она может только при наблюдении с тех точек Луны, в которых Земля всё время почти у горизонта. Такие точки расположены на границе между видимой и невидимой частями Луны. Заход Земли там бывает один раз за один период обращения Луны вокруг Земли, то есть примерно за 27,5 суток.

Ни один человек, находясь на поверхности Луны, не видел восхода Земли. Но 24 декабря 1968 года экипаж аппарата Аполлон-8 сделал фотографию «Восход Земли» (англ. *Earthrise*), когда делал оборот вокруг Луны.

В разных точках Луны заходы Земли происходят по разным причинам. Ось Луны немного наклонена к плоскости её орбиты, поэтому, облетая вокруг Земли, Луна обращена к ней то одним, то другим полюсом; соответственно и Земля видна над горизонтом то с одного полюса, то с другого. Всё точно так же обстоит и на земных полюсах с заходами Солнца. А в точках на границе видимой и невидимой частей Луны, которые находятся далеко от полюсов, заходы бывают по другой причине: из-за того что орбита Луны не круговая. Дело вот в чём. Вокруг своей оси Луна вращается с постоянной скоростью. Это вращение компенсировано движением Луны по орбите, так как она нам видна всегда только с одной стороны. Но Луна, как любой спутник, соблюдающий второй закон Кеплера, движется быстрее, находясь ближе к Земле, чем когда она находится дальше от Земли. Из-за этого, когда Луна далеко от Земли, её собственное вращение обгоняет орбитальное, а когда Луна близко – отстаёт. Вот нам и открываются небольшие участки «невидимой» стороны Луны. Происходит это с таким же периодом, с каким Луна вращается по орбите.

Биология

1. Сходства. Очень многие сходства объясняются основной защитной функцией кожи и коры. И кора, и кожа – это сложный комплекс тканей, имеющий слоистое строение. Наружный слой состоит из плотно сомкнутых клеток, создающих хорошую границу между организмом и внешней средой. Клетки самого наружного слоя мёртвые и относительно плотные. Характерно нарастание наружного слоя изнутри и слущивание внешних слоёв клеток. Кожа и кора обеспечивают газообмен между внешней средой и внутренними слоями клеток, могут в определённой степени служить для выведения продуктов обмена. Содержат элементы транспортных систем организма (луб в коре и кровеносная система в коже), могут содержать элементы, выполняющие запасающую функцию. В коже человека много желёз, кора дерева также часто имеет железистые клетки.

Различия. Кора твёрже и гораздо менее эластична, чем кожа (так как кожа покрывает более подвижные органы). Кожа имеет волосяной покров, кора – нет. Выделения кожных желёз человека (потовых, сальных) принципиально отличаются от выделений коры дерева (смола, камедь). Функцию газообмена в коре выполняют специальные структуры чечевички, в коже специализированных структур нет. В коже располагаются чувствительные нервные окончания – рецепторы, в коре чувствительных элементов нет. Слой делящихся клеток, обеспечивающих нарастание наружного слоя, в коже функционирует всю жизнь, а в коре периодически отмирает и закладывается заново в более глубоком слое.

2. Животные могут обеспечивать перенос пыльцы (опыление), участвовать в распространении спор, плодов и семян. Прохождение семян через кишечный тракт животных может улучшать прорастание семян. Животные могут рыхлить почву вокруг растения, обеспечивать удобрение растений продуктами жизнедеятельности, способствовать вегетативному размножению растений, перенося части, прорастающие на новом месте. Объедая растение, животные могут способствовать разрастанию растения в ширину, ветвлению, образованию дерновин и т.п., могут удалять старые части, от которых растению полезно избавиться. Животные могут приносить конкурентам данного растения вред (поедать, вытаптывать и др.) больший, чем ему самому, могут защищать растение от более активных и опасных пожирателей. Вытаптывая, перекапывая почву, животные организуют места, где могут прорастать семена и споры. Человек (как одно из животных) может обеспечивать рост культурных растений.

МЕНЯЕТСЯ ЛИ ВЕС? («Квантик» № 1, 2018)

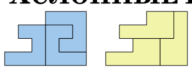
Вес может уменьшиться, если писать стилом по восковой или глиняной дощечке: часть воска или глины удаляется при письме. Очень сильно вес уменьшится, если выбивать текст на каменной плите большими буквами – изымается много каменной крошки. Стены храмов Древнего Египта испещрены иероглифами, из-за чего эти стены стали легче, возможно, на тонны камня.

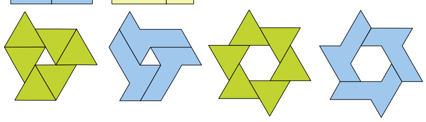
Бывает, что вес не меняется. Например, древние инки и древние китайцы фиксировали информацию, завязывая узелки на цветных шнурах. А ещё не меняется вес современной электроники – компьютеров, планшетов, смартфонов. При внесении информации изменяются значения некоторых битовых ячеек с 0 на 1 и наоборот в памяти устройства. В магнитных носителях и магнитных лентах (жёстких дисках) ячейкой служит намагниченная область, и меняется её магнитная ориентация, а в оперативной, флэш- и твердотельной памяти – транзистор, и меняется его электрический заряд.

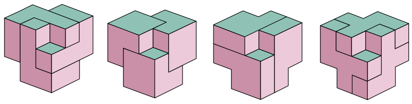
ДРЕВНЕРУССКИЕ ЛОВУШКИ

Конечно, ворон и жеребцы – это ловушки. «Вороná» – краткое прилагательное, образованное от слова «вороной», чёрный (ср. «вороной конь»). То есть, герой попросил, чтобы ему дали выпить чёрного мёда. «Дати жеребей» – это назначить жеребьёвку, ср. «бросить жребий», речь идёт о разделе земли.

ДВУХСЛОЙНЫЕ ПИРОГИ

1. 

2. 

3. 

LXXXIV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ.

Избранные задачи I тура

1. В этой задаче мы сталкиваемся с «парадоксом следователя». При расследовании преступления следователь не может доверять показаниям ни одного из подозреваемых, поскольку каждый из них может оказаться преступником, который пытается обмануть следователя. Как же тогда вообще можно что-нибудь расследовать?

Пока мы сами не занялись расследованиями, выход кажется понятным: надо «перепроверять» поступающую информацию: если люди дают разные показания, то это «подозрительно», а если показания согласуются, то это «хорошо».

Приступим к решению задачи. Сделаем простое наблюдение: разность периметров двух прямоугольников из одного столбца равна удвоенной разности их высот. Значит, если мы возьмём две строки и для каждого столбца найдём разность периметров прямоугольников из этих двух строк, то все три разности совпадут.

Разности написанных чисел действительно совпадают, если мы возьмём 1-ю и 3-ю строку. Но, если брать 2-ю строку с 1-й или 3-й, то разность в первом столбце будет отличаться от двух других.

Итак, неверное число стоит в прямоугольничке на пересечении первого столбца и второй строки. А теперь ещё задача: исправьте ошибку!

2. Допустим, что все сидящие за столом ответили «да». Рассмотрим рыцаря и лжеца, сидящих рядом (такая пара всегда найдётся: за столом есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец, и мы будем идти вдоль стола от рыцаря к лжецу).

Назовём рыцаря Ричардом, а лжеца – Леонардом. Ричард видит вокруг как минимум 11 рыцарей. Леонард видит тех же самых рыцарей, кроме, возможно, одного: 11-го соседа Леонарда со стороны Ричарда. Но взамен он видит самого Ричарда, и значит, тоже видит хотя бы 11 рыцарей. В таком случае Леонард обязан ответить «Нет».

3. Пусть нам удалось расставить числа в вершинах семиугольника требуемым способом. Если числа a и b стоят в соседних вершинах и a делится на b, поставим на стороне семиугольника стрелку, ведущую от a к b (если $a=b$, поставим стрелку произвольно). Такую расстановку стрелок выполним на всех сторонах семиугольника.

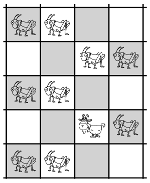
Заметим, что никакие две соседние стрелки не могут быть направлены одинаково. Действительно, пара стрелок $a \to b \to c$ означает, что a делится на b, b делится на c, и значит, a делится на c, что запрещено условием, поскольку числа a и c соединены диагональю. Тогда, двигаясь вдоль семиугольника, мы будем наблюдать, что направления стрелок чередуются. Но это невозможно, так как стрелок нечётное число – сделав круг, мы получим противоречие.

4. Эта задача относится к типу «оценка плюс пример». Для решения нужно привести ответ, доказать, что он реализуется, то есть предъявить пример расстановки заявленного числа кузнечиков, а также доказать, что ни в какой ситуации на доске невозможно расставить большее число кузнечиков – это и есть оценка.

Ответ: 4034.

Оценка. На каждой горизонтали может стоять не более двух кузнечиков: иначе какие-то два обязательно окажутся на клетках одинакового цвета и, значит, будут бить друг друга. Поскольку доска содержит 2017 горизонталей, число кузнечиков не может превышать $2 \cdot 2017$.

Пример. Достаточно занять кузнечиками 4 вертикальных ряда, как показано на рисунке. На каждой горизонтали стоит два кузнечика, поэтому суммарное число кузнечиков равно как раз $2 \cdot 2017$.



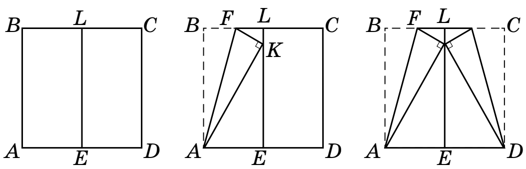
5. Последим за суммарным количеством зелёных и красных листьев. Вчера зелёные и красные листья составляли вместе $2/9$ от вчерашнего числа листьев на дереве, а сегодня – $8/9$ от сегодняшнего числа листьев на дереве.

За ночь суммарное число зелёных и красных листьев могло лишь уменьшиться, поскольку за ночь некоторые красные листья могли опасть, а некоторые зелёные могли перекраситься в жёлтые. Поэтому количество листьев, составлявшее $2/9$ от вчерашнего числа листьев на дереве, сегодня составило бы не менее $8/9$ от сегодняшнего числа листьев на дереве. Значит, за ночь число листьев уменьшилось не менее чем в 4 раза.

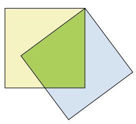
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАБАВЫ С БУМАЖНЫМ КВАДРАТОМ

1. Построим вертикальную ось симметрии EL. Новая операция такова: перегнём квадрат так, чтобы B попала на EL, а линия сгиба прошла через A. Получим точки K и F как на рисунке ниже. Точка K и будет пересечением EL с окружностью с центром в A, проходящей через B.

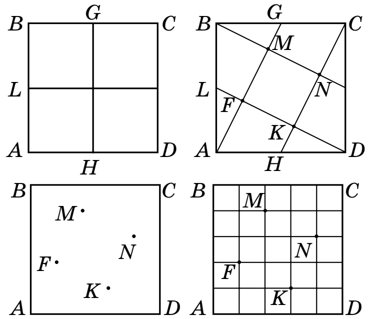
Получился угол $\angle FAK = 15°$. Почему? Отрезки AB и AK равны как радиусы окружности. Если мы повторим симметричное построение со второй стороны квадрата, то получим $CD = KD$. Значит, треугольник AKD – равносторонний, $\angle KAD = 60°$. Значит, $\angle KAB = 30°$, и $\angle FAK = 15°$.



2. Найдём середину стороны у каждого квадрата и наложим их, совместим между собой середины сторон и вершины как на рисунке.

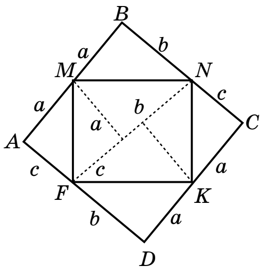


3. (А. М. Домашенко). Из каждой вершины бумажного квадрата $ABCD$ проведём отрезки к серединам соответствующих сторон. Пересекаясь, эти отрезки образуют внутренний квадрат $MNKF$. Отметим его вершины и через каждую из них проведём по два взаимно перпендикулярных отрезка, параллельных сторонам квадрата. Бумажный квадрат окажется разделён на 25 равных квадратиков. Как обосновать? С помощью теоремы Фалеса.



Любознательные могут попробовать решить не менее интересную задачу: разделить бумажный квадрат на 49 равных квадратов.

4. Нельзя. Если развернуть конверт, то получится прямоугольник $ABCD$, а не квадрат. В самом деле, заметим, что $AB = 2a$, $BC = b + c = FN$, но $FN > AB$, так как $ABNF$ – прямоугольная трапеция, значит $BC > AB$, поэтому $ABCD$ не является квадратом.



5. Разделим бумажный квадрат $ABCD$ на 16 равных квадратов и отметим четыре точки M, N, K и F, которые являются вершинами квадрата. Перегибая по отрезкам FM, MN, NK и KF, отложим внутрь прямоугольные треугольники и получим квадратный конверт с квадратным «окном» $GEHL$. Нетрудно подсчитать, что его сторона равна $3 - 1 = 2$, значит, площадь равна 4, что составляет четверть площади исходного квадрата.