Избранные задачи Нижегородской (XV открытой) математической олимпиады

Материал подготовил
Дмитрий Кузнецов

7 класс

1. На какой наименьшей квадратной доске можно расставить ферзя, короля, слона, коня и ладью так, чтобы ни одна из фигур не била никакую другую?

2. В 15-литровые вёдра налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается перелить в любое ведро из любого другого столько воды, сколько в нём уже есть. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одном ведре?

3. Сначала Вова ставит на нижней горизонтали шахматной доски слона, затем Петя и Вова по очереди (начинает Петя) двигают слона за один ход на любое количество клеток по диагонали вверх-влево или вверх-вправо. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Укажите все начальные положения слона, чтобы при правильной игре выиграл Вова.

4. Найдите наибольшее целое число N, не превосходящее 2017 и обладающее таким свойством: существует целое число A, которое делится на все целые числа от 1 до N, кроме каких-то двух последовательных.

8 класс

1. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана такая точка D, что медиана AM треугольника ABD параллельна медиане DN треугольника DBC. Найдите $\frac{AD}{DC}$.

2. Найдите $a+b$, если про действительные числа a и b известно, что $|a-1|=|b|$ и $|b-1|=|a|$.

3. В выпуклом четырёхугольнике $MNKL$ диагонали пересекаются в точке P, при этом $MN=NK=KL$ и $\angle NPK=120^\circ$. Докажите, что $MP=PL$.

4. Петя закрасил все клетки, примыкающие к краю изначально белой доски 10×10, в чёрный цвет. Может ли Вася закрасить в чёрный цвет часть клеток внутреннего белого квадрата 8×8 так, чтобы нигде на доске не нашлось одноцветного квадрата 2×2 и квадрата 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке?

Олимпиада проводится совместно с НИУ «Высшая школа экономики» для 7–11 классов. Задачи 7.2, 7.4 и 8.2 составлены по материалам Уральских турниров, задача 8.4 – по задаче Всероссийской олимпиады. Авторы остальных задач: Д. Ю. Кузнецов и Михаил Кузнецов.

Художник Сергей Чуб