Алексей Панов,
Дмитрий Ал. Панов

БУМАЖНАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Часть 1

В 1978 году Ю. В. Матиясевич опубликовал в журнале «Квант»[1] статью под названием «Модели многогранников». В ней было рассказано о конструкторе для сборки многогранников, придуманном американским архитектором Фредом Бассетти. С помощью этого конструктора мы познакомимся с плоскостью Лобачевского, собрав её бумажную модель.

Добавим, что Фред Бассетти (1917–2013) – известный американский архитектор, по его проектам построено много красивых зданий. Свой конструктор он запатентовал в 1961 году[2], и впоследствии этот конструктор продавался под названием «Flexagons».

Изготовление конструктора

В состав конструктора входят два типа деталей – резиновые колечки и многоугольные грани. В качестве колечек мы рекомендуем банковские резинки диаметром 4 см. Заготовки для граней вырезаются из листа ватмана – плотной белой бумаги. Мы будем собирать многогранники только из правильных треугольных граней, так что лист ватмана нужно разметить на правильные треугольники со стороной 12,5 см и нарезать их в большом количестве (рис. 1).

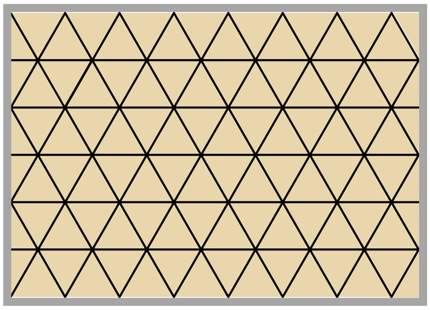

Рис. 1. Лист ватмана разбит на треугольники. Такое разбиение, где в каждой вершине сходятся шесть правильных треугольников, называется ещё правильным треугольным паркетом

Один из полученных треугольников превратим в шаблон, проделав в нём три дырочки в точках пересечения трёх прямых, удалённых от сторон треугольника на 1 см (рис. 2). Далее карандашом размечаем все остальные треугольники, расставляя в каждом по три точки через дырки в шаблоне.

[1] См. «Квант» № 1 за 1978 г., kvant.ras.ru/1978/01/

[2] https://patents.google.com/patent/US3003260

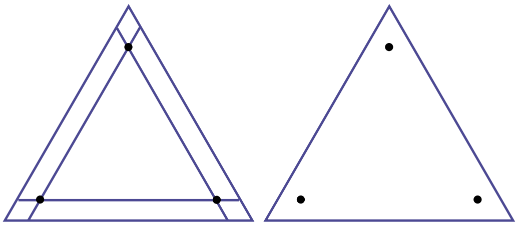

Рис. 2. Шаблон с тремя дырочками, ширина полосок в нём равна 1 см; справа – размеченный треугольник со сторонами 12,5 см

Теперь берём в руки ножницы и начинаем вырезать заготовки граней. Сначала в каждой из вершин треугольника, ориентируясь на отмеченную точку, вырежем по маленькому четырёхугольнику (рис. 3, слева), а потом отогнём боковые полоски вверх и хорошо прогладим сгибы. Дальше отрежем ещё шесть маленьких треугольничков, а потом и ещё шесть поменьше (рис. 3, справа).

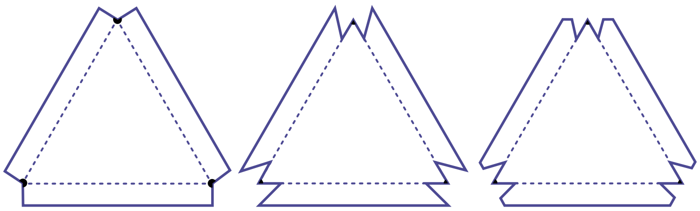

Рис. 3. Фазы изготовления заготовок

Рис. 4. Соединение граней

На рисунке 4 мы видим две уже готовые бумажные детали конструктора. Там же показан механизм соединения этих деталей-граней – они прикладываются друг к другу отогнутыми рёбрами, на которые накидывается слегка растянутая резинка.

А теперь можно приступать к большой сборке.

Тетраэдр → Октаэдр → Икосаэдр → Плоскость → ?

Начнём со сборки тетраэдра, у которого в каждой вершине сходятся по три грани, затем соберём октаэдр, в вершинах которого сходятся по четыре грани,

потом икосаэдр, у которого в вершинах сходятся по пять граней (рис. 5).

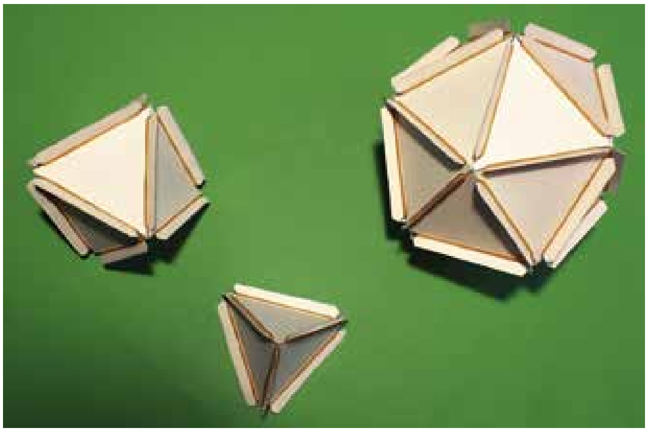

Рис. 5. Тетраэдр, октаэдр, икосаэдр

Из них больше всего похож на сферу наш двадцатигранный икосаэдр, и его вполне можно было бы назвать бумажной моделью сферы.

Попробуйте теперь собрать многогранник, у которого в каждой вершине сходятся шесть треугольных граней. Тут нас ждёт первый сюрприз: оказывается, что в результате получается не многогранник, а многогранная поверхность, и если не останавливаться, то это будет бесконечная поверхность – целая плоскость. Это можно проверить экспериментальным путём – в процессе сборки, а можно просто ещё раз посмотреть на рисунок 1, чтобы понять, в чём здесь дело.

Бумажная модель плоскости Лобачевского

А теперь посмотрим, что скрывается за знаком «?» в заголовке предыдущего раздела. Для этого при сборке многогранника в каждой вершине будем соединять по семь треугольных граней. Здесь опять возникнет бесконечная многогранная поверхность (рис. 6), и, как

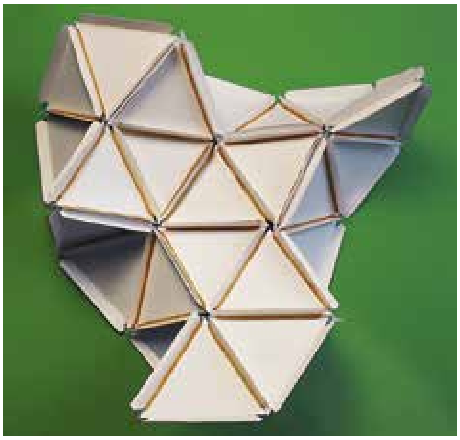

Рис. 6. Бумажная модель плоскости Лобачевского. При сборке она начинает сильно изviваться

мы увидим, она будет служить неплохой моделью для плоскости Лобачевского.

На рисунке 6 собран небольшой кусок поверхности, но уже видно, что с ростом числа граней она начинает сильно извиваться и целиком не сможет разместиться в нашем трёхмерном пространстве – в некоторый момент её сборка застопорится. Таким же свойством обладает и настоящая плоскость Лобачевского, её тоже нельзя разместить в трёхмерном пространстве, – это известная теорема Гильберта.

Изучение нашей модели начнём с того, что попытаемся нарисовать на ней прямую. Вот как это можно сделать. Сначала на выбранной треугольной грани с помощью линейки проведём отрезок прямой. Для продолжения отрезка на соседнюю грань выровняем обе грани, чтобы они лежали в одной плоскости, и с помощью линейки продолжим наш отрезок на соседнюю грань. Это первый шаг, но, повторяя его раз за разом, можно неограниченно продолжить отрезок в одну сторону, и так же в другую – получится бесконечная прямая. Но не всегда, а только если мы ни в какой момент не попадём в вершину треугольника. В вершине нам не удастся одновременно выровнять все семь треугольников. Максимум можно выровнять пять треугольников, причём двумя разными способами. Тем самым, прямая продолжается неоднозначно.

Удобно считать, что сторона поверхности, видная на рисунке 6, это изнанка, а на противоположной гладкой стороне будем рисовать, как это сделано на рисунке 7. Наша модель благодаря резинкам обладает упругими свойствами, заставляющими её изгибаться, поэтому, проводя прямую, желательно прижимать конструкцию линейкой.

Рис. 7. Проведение прямой

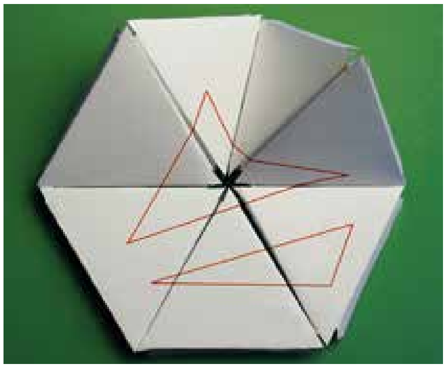

Рис. 8. В одном треугольнике сумма углов равна 180°, в другом 120°

После того как мы научились рисовать прямые, можно строить треугольники. На маленьком кусочке нашей модели с одной вершиной посередине, где сходятся семь граней, нарисованы два треугольника (рис. 8).

Возьмите транспортир и измерьте на своей модели сумму углов в каждом из них. В том треугольнике, который не содержит вершины, сумма углов равна 180°, как в обычном треугольнике на обычной плоскости. В другом треугольнике сумма углов равна 120°. Если внутри треугольника будут содержаться две вершины поверхности, то сумма углов в нём будет равна 60°. А треугольников, содержащих внутри себя больше двух вершин, на нашей поверхности просто не существует.

На настоящей плоскости Лобачевского происходят аналогичные вещи. Во-первых, там сумма углов любого треугольника меньше 180°, во-вторых, площадь любого треугольника не может превосходить некоторого фиксированного числа. Второй факт как раз соответствует тому, что у нас внутри треугольника не может лежать более двух вершин.

А теперь о самом интересном – о параллельных прямых, то есть о прямых, которые не пересекаются. Посмотрите на рисунок 9, где нарисованы две

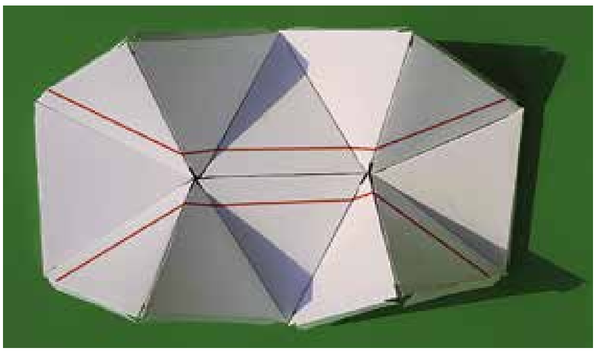

Рис. 9. Эти параллельные прямые наиболее близки в одном месте и расходятся при удалении от него

непересекающиеся – параллельные прямые. Видно, что в некоторый момент они расположены близко друг к другу, но при удалении и в одну и в другую сторону от этого места они начинают расходиться. Это происходит на нашей поверхности, но это также характерное поведение параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

Правда, на нашей модели есть и исключения из этого правила. Если в полосе между параллельными прямыми нет ни одной вершины поверхности, то эти прямые всё время остаются на одном и том же расстоянии друг от друга (рис. 10).

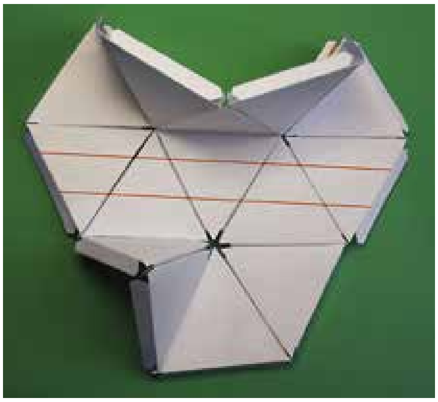

Рис. 10. Эти две параллельные прямые всё время остаются на одинаковом расстоянии друг от друга

И наконец, о самом главном – о том, что на обычной плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно всегда провести одну и только одну прямую, параллельную данной, а на плоскости Лобачевского это не так. Не так это и на нашей модели, и рисунок 11 отчётливо демонстрирует это.

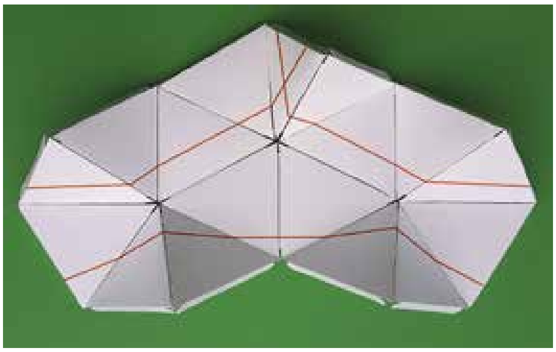

Рис. 11. Через точку вне нижней прямой проходят две прямые, параллельные данной (не пересекающие её)

На этом мы закончим короткий обзор нашей модели, а в следующем номере скажем несколько слов о том, как она связана с правильными паркетами на плоскости Лобачевского.

Фото: Валентина Асташкина
Художник Алексей Вайнер