Алексей Панов,
Дмитрий Ал. Панов

БУМАЖНАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Часть 2

В прошлом номере мы хорошо поработали с нашей бумажной моделью. Обсудили её сходство с настоящей плоскостью Лобачевского и одновременно рассказали о некоторых отличиях. А теперь мы поговорим о другой – чисто геометрической модели, которая абсолютно точно представляет собой плоскость Лобачевского, а также добавим несколько слов о правильных паркетах.

Диск Пуанкаре

Как мы уже говорили в первой части, по теореме Гильберта плоскость Лобачевского нельзя расположить в нашем трёхмерном пространстве. Но точно так же сферу или полусферу нельзя без искажений расположить на обычной плоскости. Тем не менее, у нас в распоряжении имеются удобные географические карты – плоские листы (рис. 12), по которым можно ориентироваться и с помощью простой школьной математики вычислять расстояния между различными земными пунктами.

Рис. 12. Школьная карта Восточного полушария, 1941 г.

Точно так же имеется замечательная карта плоскости Лобачевского – *диск Пуанкаре*. На этой карте плоскость Лобачевского тоже размещается внутри круга, и прямые на этой карте – это дуги окружностей, перпендикулярные границе круга (рис. 13). Сравните этот рисунок с рисунком 9 из первой части.

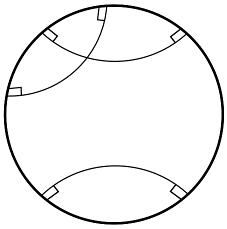

Рис. 13. Три прямые в плоскости Лобачевского изображены на диске Пуанкаре, две из прямых параллельны третьей (не пересекают её) и проходят через одну точку

Опять же плоскость Лобачевского изображается на диске Пуанкаре, то есть на обычном круге, с большим искажением, и опять же имеется несложная математика, позволяющая с помощью этой карты рассчитывать истинные расстояния на плоскости Лобачевского, а также длины окружностей, площади треугольников и других фигур и всё остальное.

Правильные паркеты

Расскажем ещё об одном замечательном свойстве плоскости Лобачевского. Помните, в первой части мы пытались из правильных треугольников составить многогранник, в каждой вершине которого сходилось бы по шесть таких треугольников, а у нас получилась целая плоскость (рисунок 1 из части 1)? Оказывается, что на обычной плоскости существует только конечное число таких паркетов, составленных из правильных многоугольников. Другое дело – плоскость Лобачевского, там их бесконечно много.

На рисунке 14 представлен один из них (на диске Пуанкаре). Это ближайший родственник нашей бумажной модели, тут тоже в каждой вершине сходятся семь равносторонних треугольников, только на плоскости Лобачевского углы у них уже не по $60°$, а по $360°/7$.

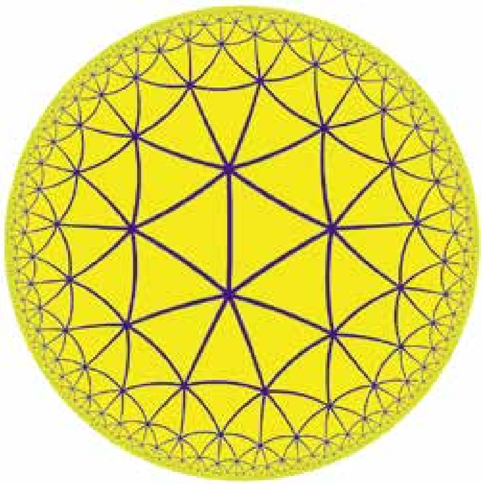

Рис. 14. Правильный паркет на плоскости Лобачевского: в каждой вершине, как и на нашей модели, сходятся семь равносторонних треугольников

Обратите внимание, что на этом рисунке все стороны треугольников искривлены, но так и должно быть – ведь на диске Пуанкаре они должны быть представлены дугами окружностей, перпендикулярных границе диска.

Кроме того, на первый взгляд не похоже, что длины сторон во всех треугольниках равны между собой. Но мы уже говорили, что расчёт расстояний на диске Пуанкаре происходит не так, как на обычной плоскости, и этот расчёт показывает, что все треугольники на рисунке 14 равносторонние и действительно равны между собой.

Наконец, обратите ещё внимание на то, что по мере приближения к граничной окружности треугольники визуально уменьшаются, и это говорит о том, что наиболее сильные масштабные искажения происходят именно вблизи граничной окружности диска Пуанкаре. Наверное, так и должно быть – ведь плоскость Лобачевского не помещается даже в нашем трёхмерном пространстве, а мы попытались разместить её внутри обычного круга.

Другие паркеты и другие бумажные модели

На плоскости Лобачевского существует ещё, например, паркет, составленный из правильных шестиугольников и семиугольников (рис. 15).

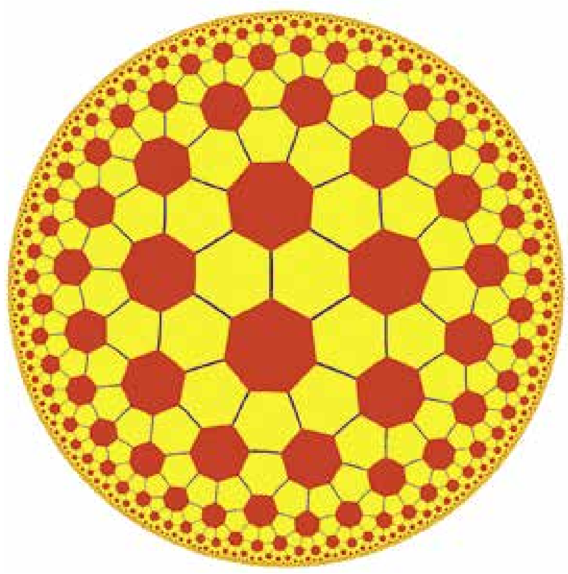

Рис. 15. Паркет из правильных шестиугольников и семиугольников на плоскости Лобачевского

Его тоже можно использовать для построения бумажной модели плоскости Лобачевского. Эта бумажная модель называется «гиперболический футбольный мяч» (hyperbolic football), и вот как она выглядит в руках математика Фрэнка Соттайла и его учеников (рис. 16)[1]. Они, кстати, скрепляют свои многоугольники не резинками, а скотчем. На фотографии все модели повернуты к нам цветной стороной, а все геометрические построения находятся на противоположной – однотонной белой. Мы тоже действовали по этому образцу, все рисунки делали на удобной – гладкой стороне.

Рис. 16. Фрэнк Соттайл со своими учениками, каждый из них держит собственноручно собранный гиперболический футбольный мяч

Сборку подобных моделей можно осуществлять и на экране компьютера. Посмотрите, как это происходит, в трёхминутном ролике под названием Growable surface[2], созданном Atelier Panda.

А на сайте Matematicas Visuales в разделе «Сборка многогранников из бумаги и резиновых колечек»[3] можно познакомиться с другими красивыми объектами, собранными из конструктора, придуманного Фредом Бассетти.

В заключение приводим ссылку на сайт компьютерной игры Hyperrogue, в которой можно побродить по плоскости Лобачевского: roguetemple.com/z/hyper.

[1] www.math.tamu.edu/~sottile/research/stories/hyperbolic_football/
[2] vimeo.com/22005174
[3] How to build polyhedra with paper and rubber bands, goo.gl/anPwiM

Художник Алексей Вайнер