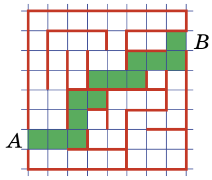
НАШ КОНКУРС («Квантик» № 5, 2018)

36. *Перед вами рисунок лабиринта. В нём разрешается сломать одну из перегородок между клетками. Сделайте это так, чтобы длина кратчайшего пути по клеткам от выхода A к выходу B была наименьшей. Не забудьте обосновать ответ.*



Ответ приведён на рисунке. Зелёный путь кратчайший, потому что идёт всегда либо слева направо, либо снизу вверх, а количество шагов слева направо (снизу вверх) не может быть меньше расстояния по горизонтали (по вертикали) между начальной и конечной клетками.

37. *В Шиловске шило стоит на 1% дешевле, чем в Мыловске, а мыло – на 1% дороже. Проезд из одного города в другой стоит 1000 рублей. У юного бизнесмена, живущего в Шиловске, есть 100 тысяч рублей и он мечтает разбогатеть, меняя шило на мыло.*

Сбудутся ли его мечты?

Ответ: нет.

По условию, в Шиловске цена шила – 99/100 его цены в Мыловске, а цена мыла – 101/100 его цены в Мыловске. Значит, купив шило в Шиловске на x рублей, мы выручим за него в Мыловске $100x/99$ рублей, то есть прибыль составит $x/99$ рублей. Аналогично, купив мыло в Мыловске на y рублей, мы выручим за него $101y/100$ рублей, то есть прибыль составит $y/100$ рублей. Поскольку на каждый переезд надо иметь в запасе 1000 рублей, изначально мы не можем закупить товара больше чем на 99000 рублей, а тогда прибыль от продажи составит не более 1/99 или даже 1/100 потраченного, и во всяком случае не более той самой тысячи рублей, которая уходит на проезд. Тогда у нас снова не более 100000 рублей, и мы никогда не превысим эту сумму.

38. *Можно ли квадрат разрезать на трапеции, в каждой из которых есть угол 179°?*

Ответ: можно.

Если взять достаточно тонкую прямоугольную полоску, её удастся разрезать на две трапеции с углом 179°, проведя через центр полоски прямую под углом 179° к длинной стороне полоски (как показано на рисунке ниже). А квадрат можно разрезать на такие тонкие полоски.

39. *Расшифруйте ребус $НЕ + МНЕ = ЕМУ$. (Найдите все ответы и докажите, что других нет. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные, и ни одно число не начинается с ноля.)*

Ответ: $76 + 576 = 652$.

При сложении число сотен изменилось. Но прибавляя двузначное число к трёхзначному, мы можем увеличить число сотен максимум на 1. Значит, $Е = М + 1$. Подставив в исходное равенство, получаем: $10Н + (М + 1) + 100М + 10Н + (М + 1) = 100(М + 1) + 10М + У$. Приведём подобные: $20Н = 8М + 98 + У$. Число $98 + У$ должно делиться на 4, так как остальные слагаемые делятся. Значит, $У = 2$ или $У = 6$.

Если $У = 2$, то $5Н = 25 + 2М$. Левая часть делится на 5, значит $М$ делится на 5. Но $М \neq 0$ (так как $МНЕ$ не начинается с нуля), откуда $М = 5$, и тогда $Н = 7$, $Е = 6$, это решение.

Если $У = 6$, то $5Н = 26 + 2М$. Левая часть делится на 5, значит, $2М = 4$ или $2М = 9$. Второй вариант невозможен, значит, $М = 2$, $Н = 6$. Противоречие, поскольку $Н = У$.

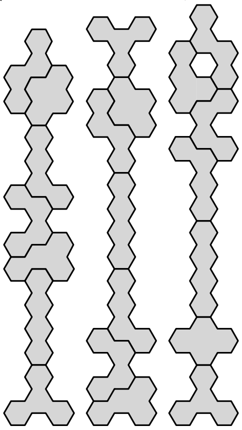
40. *Гравировщик шлифует алмаз, имеющий форму выпуклого многогранника, превращая его постепенно в бриллиант. Начинает он с того, что сначала срезает все уголки алмаза-многогранника (маленькие пирамидки при вершинах) остро отточенным плоским ножом. Докажите, что после этой операции число вершин у полученного многогранника будет чётным, а число рёбер – делиться на 3.*

Пусть в полученном многограннике $В$ вершин и $Р$ рёбер. Заметим, что из каждой его вершины выходит 3 ребра – два новых маленьких и кусочек старого. Умножим число вершин на 3: тогда мы посчитаем все рёбра, причём каждое ребро – по два раза (ведь у ребра две концевые вершины). Значит, $3В = 2Р$. Но тогда $В$ делится на 3, а $Р$ – на 2, что и требовалось.

МОНЕТЫ КАРИБСКОГО МОРЯ («Квантик» № 5, 2018)

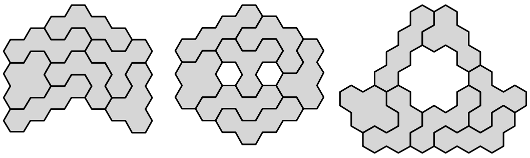
Номинал на каждой монете указан в новых и старых единицах: $\frac{1}{2}$ цента и $2\frac{1}{2}$ бита, 40 центов и 2 франка, 4 далера и 20 франков. 20 франков равны 400 центам и равны 4 далерам. Значит, в далере 100 центов. 40 центов равны 200 битам и равны 2 франкам. Значит, во франке 100 битов.

БАШНИ ИЗ ТЕТРАГЕКСАГОНОВ И ДРУГИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ («Квантик» № 5, 2018)

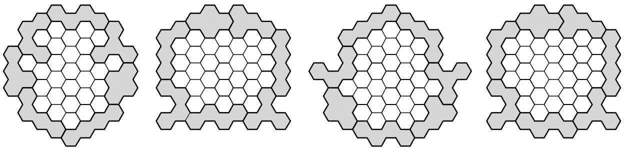


33 34 35

Башни наибольшей высоты



Построение фигур по силуэтам

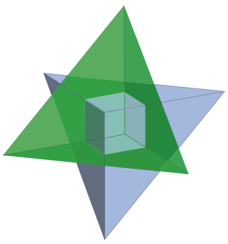


28 29 30 31

Симметричные фигуры с наибольшей пустой областью

ДВЕ ПИРАМИДКИ («Квантик» № 5, 2018)

Ответ: куб (см. рисунок).



Чтобы объяснить ответ, возьмём сначала куб и поставим его одной вершиной в угол прямоугольной комнаты. Возьмём равносторонний треугольник такого размера, что, если совместить его центр с противоположной вершиной куба, все стороны треугольника окажутся на стенах и полу комнаты. Тогда куб окажется внутри такой же пирамидки, как в условии задачи.

Построим ещё одну точно такую же пирамидку, содержащую наш куб, но симметричную первой относительно центра куба. Пересечение этих пирамидок есть наш куб (так как симметричная комната пересекает исходную ровно по этому кубу). Осталось показать, что эти пирамидки удовлетворяют условию задачи.

Действительно, по построению вершина каждой пирамидки оказалась в центре основания другой пирамидки – в вершине куба. Основания оказались повёрнуты друг относительно друга на 60°, если смотреть перпендикулярно основаниям, потому что по построению они суть правильные треугольники, симметричные друг другу относительно центра куба.

ГЕРБЕРТ УЭЛЛС, ПОЛЬ ГОГЕН, ЛЕ КОРБЮЗЬЕ

Выдумана история про Гогена. Нельзя увидеть звезду, «целующуюся с месяцем», так как это означало бы, что она видна сквозь невидимую в данный момент часть Луны. Такого рода изображение действительно встречается на флагах некоторых современных государств.

БЛЕДНЫЙ МАВР

Рита посоветовала артисту нанести грим на руки и надеть перчатки телесного цвета. Выйдя на сцену, Пупков демонстративно снял перчатки и показал загримированные руки.

Жених Оли Крыловой тоже считал, что Джульетту должна играть его молодая невеста. Он насыпал табак из своих сигарет в букет, и, понюхав его, Булкина расчихалась.

LXXXIV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Допустим, что a и b различны: например, $a > b$. Среди записанных чисел есть две единицы: одна из них – делитель a, другая – делитель b. Поскольку произведения во всех Катиных парах равны, двум самым маленьким числам (единицам) должны быть поставлены в пару два самых больших (и одинаковых) числа. Но самое большое число на доске лишь одно – это a. Противоречие. Значит, допущение неверно, и $a = b$.

2. Ответ: за столом 200 лжецов.

Каждый рыцарь дал два одинаковых ответа. А лжец может по-разному ответить на два вопроса, и его ответы отличаются не более чем на 2. Поскольку суммы у Ани и Антона отличаются на 400, лжецов было не меньше 200.

Пусть было $k \leqslant 100$ рыцарей. Каждый из лжецов мог внести вклад 1 или 2 в разность сумм Ани или Антона, причём лжецы с вкладом 2 имеют ровно одного соседа-рыцаря – таких лжецов не более $2k$. Тогда разность сумм не может превышать (всего лжецов) + (количество лжецов с вкладом 2) $\leqslant (300 - k) + 2k = 300 + k$. Эта сумма достигает 400 только при $k = 100$, то есть лжецов было ровно 200.

3. Ответ: выиграет Саша.

Пусть перед очередным ходом Саши написано число x, причём Саша ещё не проиграл. Тогда после хода Саши и Андрея на доске окажется одно из чисел $1000x+000$, $1000x+001$, ..., $1000x+999$, причём Саша поставит на своём ходу цифру в разряд сотен этого числа, а Андрей – цифры в разряды десятков и единиц. Среди этих чисел не более 9 чисел делятся на 112 (потому что для 10 чисел, делящихся на 112, разность между наибольшим и наименьшим числом будет не менее $9 \cdot 112 = 1008$). Значит, найдётся цифра, которая задаёт сотню, не содержащую ни одного числа, делящегося на 112. Саша поставит эту цифру и тем самым не даст Андрею выиграть на следующем ходу.

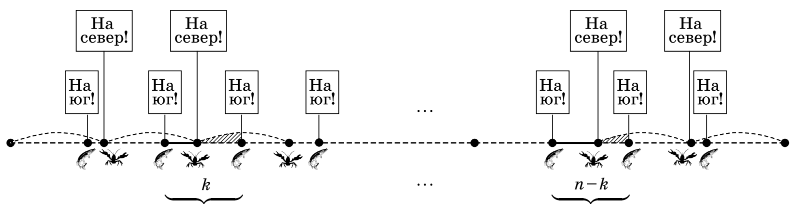
Саша может действовать так на каждом своём ходу, пока не появится 2018-значное число (что случится после 672-го хода Саши).

4. Ответ: $(m-n)n$ метров.

Ясно, что воз остановился, когда Щука подала m-ю команду, а Рак – n-ю. Назовём промежуток времени между последовательными командами Щуки (и промежуток между полночью и первой командой) *часом* (это не приведёт к недоразумению, так как соображения о длительности такого *часа* мы использовать не будем). Тогда с полуночи до конца поездки прошло m *часов*. Так как $m > n$, в течение *часа* Рак мог скомандовать не более одного раза.

Рассмотрим *час*, содержащий k-ю по счёту команду Рака, и *час*, на который пришлась $(n-k)$-я команда Рака. На рисунке ниже мы взяли $k=2$, интересующие нас *часы* выделены на оси времени фигурными скобками. Так как вся поездка длилась целое число *часов*, k-я команда Рака дана спустя mk минут после полуночи, а $(n-k)$-я команда Рака дана за mk минут до остановки, рассматриваемые *часы* симметричны: в первом от начала *часа* до команды Рака прошло столько же минут, сколько во втором от команды Рака до конца *часа*.

Тогда в течение этих двух *часов* воз проехал равные расстояния на север и на юг. (Для рассматриваемых *часов* интервалы времени, когда воз двигался на юг, изображены на рисунке сплошной линией, а на север – штриховкой.)



Значит, перемещение воза определяется лишь теми *часами*, во время которых не было подано команд Рака. Таких *часов* $m-n$, в течение каждого из них воз ехал n минут на юг.

Вопрос на засыпку. Если n чётное, то при $k=n/2$ имеем $k=n-k$. Это значит, что вместо двух симметричных *часов* мы получаем в этом случае один и тот же *час*. Что же делать?

5. Ответ: 1 человек.

Пусть a человек занимаются только математикой, $b \geqslant 1$ человек – и танцами, и математикой. Тогда по условию $(a+b)^2=(p+1)a+b$. Вычтем $a+b$ из обеих частей: $(a+b)^2-(a+b)=pa$. Вынесем за скобки общий множитель в левой части: $(a+b)(a+b-1)=pa$.

Так как p простое, одна из скобок в левой части делится на p. Тогда a должно делиться на другую скобку! Но очевидно, что первая скобка больше a, а вторая не меньше a. Значит, a может делиться лишь на вторую скобку, причём лишь в случае, когда вторая скобка равна a. Это возможно только при $b=1$.

6. Ответ: 3 хода (король посетит 4 клетки).

Правило, по которому ходит шахматный король, даёт возможность обойти клетки квадратика 2×2 (лежащего внутри доски) в любом порядке, поэтому Петя всегда сможет сделать три хода королём: он поставит короля на наименьшее число в квадратике, потом сдвинет его на следующее по величине число, потом опять на следующее по величине и, наконец, на максимальное число в квадратике.

Покажем, как расставить числа, чтобы Петя не смог сделать на доске больше трёх ходов королём. Покроем доску непересекающимися квадратиками 2×2 (некоторые квадратики будут выходить за край доски). Пусть Вася ставит числа на доске по возрастанию: сначала в левые верхние угловые клетки квадратиков, потом, когда все эти клетки заполнены, в правые верхние клетки; когда и они заполнятся, Вася заполнит левые нижние клетки, и в самом конце – правые нижние (пример для доски 5×5 см. справа). На такой доске король не сможет сделать больше трёх ходов.

1	10	2	11	3
16	22	17	23	18
4	12	5	13	6
19	24	20	25	21
7	14	8	15	9