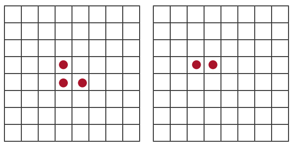
НАШ КОНКУРС, X ТУР («Квантик» № 6, 2018)

46. *Расшифруйте ребус $AX + OX = ОДА$. (Найдите все ответы и докажите, что других нет. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные, и ни одно число не начинается с ноля.)*

Ответ: $89 + 19 = 108$. Так как трёхзначное число $ОДА$ есть сумма двух двузначных, то $О=1$. Чтобы сумма $AX+1X$ была трёхзначной, должно быть $A=8$ или $A=9$. Случай $A=9$ не подходит: как видно из последних цифр в равенстве, A чётно. Если $A=8$, то X не меньше 5 (чтобы сумма была трёхзначной), и поскольку последняя цифра суммы есть 8, имеем $X=9$.

47. *На клетчатой доске стоят три фишки (как показано на левом рисунке). Одним ходом можно одновременно передвинуть одну фишку вверх (на одну клетку), одну фишку влево (на одну клетку) и одну фишку по диагонали вправо-вниз (на одну клетку). После нескольких таких ходов две фишки встали, как показано на правом рисунке. Где могла оказаться третья фишка?*



Пронумеруем столбцы слева направо, а строки – сверху вниз. За один ход сумма номеров трёх столбцов, в которых стоят фишки, не меняется и остаётся равной 13. Так же и для строк сумма остаётся равной 14. Тогда у третьей фишки на правой картинке номера столбца и строки равны 6. Проверьте, что такую позицию можно получить за один ход.

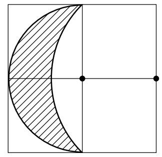
48. *Олег устраивает вечеринки исключительно по пятницам 13-го. Мог ли он остаться без вечеринок в каком-нибудь году? А какое наибольшее число вечеринок может быть у Олега за год?*

Ответ: нет, не мог; 3 вечеринки. Выпишем для 13-го числа каждого месяца, какой остаток при делении на 7 даёт номер этого дня в году. Для невисокосного года получим последовательность 6, 2, 2, 5, 0, 3, 5, 1, 4, 6, 2, 4, для високосного – 6, 2, 3, 6, 1, 4, 6, 2, 5, 0, 3, 5.

У всех пятниц номера дней в году имеют один и тот же остаток при делении на 7 (так как у соседних пятниц номера различаются на 7).

Так как в обеих последовательностях каждый остаток встречается хотя бы раз, то в любом году есть хотя бы одна пятница 13-го, то есть Олег без вечеринок не останется. Посмотрим, какое наибольшее число раз остаток может повториться в последовательности. Как видно, не больше 3 раз, то есть у Олега может быть максимум 3 вечеринки.

49. *На клетчатой бумаге провели две окружности с центрами в отмеченных точках. Их дуги ограничивают заштрихованную фигуру. Найдите её площадь, если площадь одной клетки равна 1.*



Ответ: 1. Заштрихованную фигуру можно получить, вырезав из полукруга радиуса 1 сегмент круга радиуса $\sqrt{2}$. А этот сегмент получается, если вырезать из четвертинки круга радиуса $\sqrt{2}$ равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{2}$. Значит, искомая площадь равна $\frac{\pi}{2}-\left(\frac{2\pi}{4}-1\right)=1$.

50. *У эксперта есть 8 золотых пластин, промаркированных 10 г, 20 г, 30 г, 40 г, 50 г, 60 г, 70 г и 80 г, а также слабочувствительные двухчашечные весы без гирь. Более тяжёлая чашка этих весов перевесит, если разность весов на чашках больше 10 г, иначе весы останутся в равновесии. Эксперт знает, что вес ровно одной из пластин меньше заявленного. Как ему определить эту пластину на таких весах за 3 взвешивания?*

Положим на первую чашу пластины 30 г, 70 г, 80 г (суммарно 180 г, если настоящие), а на вторую – пластины 20 г, 40 г, 50 г, 60 г (суммарно 170 г, если настоящие). Если фальшивая среди пластин 10 г, 30 г, 70 г, 80 г, то весы покажут равновесие или вторая чаша перевесит (первый случай), а иначе – первая чаша перевесит (второй случай). Так мы узнаем четвёрку пластин, среди которых фальшивая.

Далее, в первом случае положим на первую чашу пластины 10 г и 80 г, а на вторую – 30 г и 70 г; во втором случае положим на первую чашу 20 г и 60 г, а на вторую – 40 г и 50 г. Теперь сумма объявленных масс пластин на первой чаше на 10 г меньше, чем на другой, поэтому если фальшивая пластина лежит на первой чаше, то перевесит вторая чаша, а если фальшивая – на второй чаше, то будет равновесие или перевесит первая чаша. Так мы найдём две пластины, среди которых фальшивая.

Чтобы среди двух пластин найти фальшивую, нужно одну из них положить на чашу, а на другую чашу положить настоящую из остальных шести, у которой объявленная масса отличается ровно на 10 г. За одно взвешивание мы определим, настоящая ли выбранная пластина, а значит, определим фальшивую.

ФЛЕКСОТРУБКА («Квантик» № 7, 2018)

Возьмите два противоположных угла на верхнем краю трубки и сведите вместе (рис. 1), разводя в стороны соседние с ними углы на нижнем краю. Тогда два других угла на нижнем краю также сведутся вместе и получится квадрат на рисунке 2. Теперь возьмите два угла квадрата и соедините их снизу.


Рис. 1

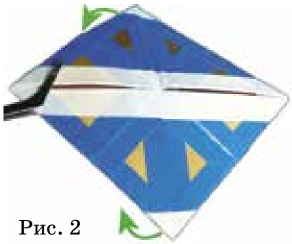


Рис. 2

Внутри гипотенузы получившегося треугольника есть два язычка. Разведите их в стороны (рис. 3). Затем соедините вместе концы гипотенузы бывшего треугольника (рис. 4).

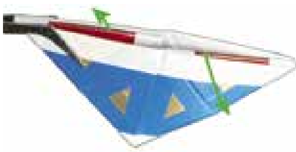


Рис. 3

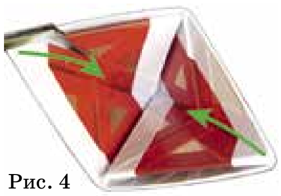


Рис. 4

В углу получившегося квадратика переплетаются две полосы. Выгните их наружу, как на рисунке 5, и разведите в стороны друг от друга. Разведите красные створки в стороны (рис. 6).


Рис. 5

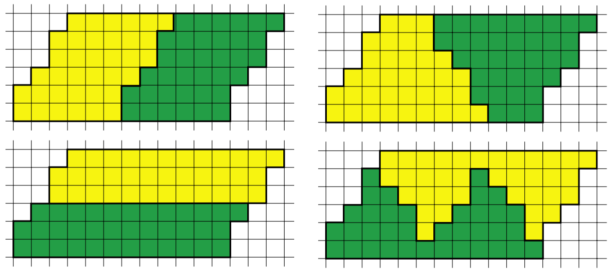

Рис. 6


Рис. 7

Поздравляем, у вас получилась уменьшенная в два раза копия исходной флексотрубки, только обе её стороны раскрашены и в красный, и в синий цвета «одинаковым образом» (рис. 7).

Поверните трубку так, чтобы красный и синий цвета «поменялись местами». Теперь, проделав все операции в обратном порядке, вы получите исходную флексотрубку, вывернутую наизнанку.

ЧЕТЫРЬМЯ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ («Квантик» № 7, 2018)



ВОКРУГ ФУТБОЛА («Квантик» № 7, 2018)

1. Ответ: лжецы. Допустим, Антон сказал правду. Тогда общее число голов, забитых правдолюбами, даёт остаток 1 при делении на 3. Однако 18 делится на 3, а 20 даёт остаток 2 при делении на 3. Противоречие. Значит, Антон играл за лжецов. При этом общее число голов, забитых правдолюбами, делится на 3. Поэтому лжецы выиграли со счётом 20:18.

2. Ответ: последнее. По условию, после первого тура одна команда (обозначим её A), набрала меньше всех очков. Значит, она проиграла в первом туре некой команде B, а две другие команды C и D сыграли вничью. Но тогда A в следующих турах выиграла и у C, и у D, так как иначе она набрала бы всего не более 4 очков и не могла оказаться единоличным лидером по итоговому числу очков в своей группе (поскольку либо B взяла хотя бы одно очко в матчах с C и D, либо каждая из команд C и D набрала не менее 4 очков). Получаем таблицу:

	Число очков в туре			
Команда	Тур 1	Тур 2	Тур 3	Общее
A	0	3	3	6
B	3			
C	1	0		
D	1		0	

Видим, что лишь B могла набрать в сумме ровно 3 очка. Значит, она два оставшихся матча проиграла и заняла в итоге последнее место.

3. Ответ: 8 или 35. Пусть всего было n команд и ровно k матчей закончилось победой одной из команд. Тогда всего было сыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ матчей. Заметим, что в ничейных матчах участники в сумме получают 2 очка, а в остальных – в сумме 3 очка. Тогда по условию $2\frac{n(n-1)}{2}+k=$ $=100$, откуда $n(n-1)=100-k\leqslant 100$.

Так как $k\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$ (равенство возможно, лишь если все матчи закончились победой одной из команд), то $3\frac{n(n-1)}{2} \geqslant 100$, откуда, с учётом предыдущего, $67 \leqslant n(n-1) \leqslant 100$. Это возможно лишь при $n=9$ или $n=10$.

При $n=9$ получаем, что $k=28$. Всего было $9 \cdot \frac{8}{2} = 36$ матчей, из которых $36-28=8$ закончились вничью. При $n=10$ получаем, что $k=10$. Всего было $10 \cdot \frac{9}{2} = 45$ матчей, из которых $45-10=35$ закончились вничью.

4. Докажем, что команд не менее 6. Если их было 5, то они провели между собой $5 \cdot \frac{4}{2} = 10$ матчей и в сумме набрали не менее 20 очков. Значит, абсолютный победитель набрал более $\frac{20}{5} = 4$ очков. Но по условию он набрал не более 5 очков из 12 возможных. Тогда победитель набрал ровно 5 очков, а каждая из остальных команд – не более 4. Значит, общая сумма очков не превосходит $5+4\cdot4=21$. Но число очков у победителя означает, что он хотя бы раз выиграл и хотя бы раз проиграл, то есть общая сумма очков не меньше 22, так как хотя бы в двух матчах участники получили в сумме 3 очка, а не 2. Противоречие. Рассуждения для турнира из 2, 3 или 4 команд аналогичны. Вот пример с 6 командами: пусть победитель выиграл один матч, а все остальные матчи закончились вничью. Тогда победитель набрал 7 очков, что меньше 50% от 15.

ШАРИКИ НА БОКУ («Квантик» № 7, 2018)

Шарик поднимается вверх, а ленточка тянет его вниз. Если бы ленточка была невесома, то шарик бы лежал прямо на боку, то есть так, чтобы его центр масс был выше всего.

Хотя подъёмной силы шарика достаточно, чтобы удерживать шарик вместе с ленточкой у потолка, ленточка поворачивает шарик с бока ближе к вертикальному положению.

В обратную сторону шарик поворачивается из-за того, что он упирается в потолок, который компенсирует подъёмную силу.

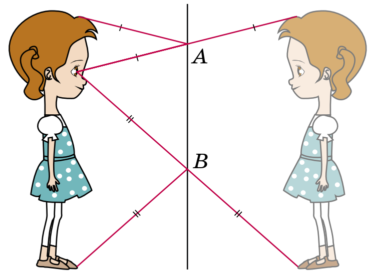
Если шарик хорошо накачан, он будет лежать почти на боку. Если шарик вот-вот начнёт падать, сила опоры о потолок будет много меньше силы тяжести ленточки. Тогда при малейшем отклонении от вертикального положения тяжесть ленточки вернёт шарик обратно.

ВЫСОТА ОТРАЖЕНИЯ

Ответ: примерно половина роста Маши, вне зависимости от расстояния до зеркала.

Мы предполагаем, что Маша стоит строго параллельно зеркалу. Будем считать, что её макушка, глаза и пальцы ног находятся на одном и том же расстоянии от зеркала (это не совсем верно, но не сильно повлияет на результат).

Маша видит в зеркале своё отражение целиком – от макушки до пальцев ног (на зеркале Маша отметила их в точках A и B соответственно). Проведём два луча света, входящих в Машины глаза: один, исходящий из макушки, и второй – из пальцев ног. Каждый из них падает на зеркало под тем же углом, что и отражается. Отразим мысленно Машу вместе с отрезками лучей, идущими от зеркала к макушке и пальцам ног, относительно зеркала, как на рисунке. Тогда эти лучи станут продолжениями лучей, проходящих через глаза Маши и верх и низ рисунка Маши на зеркале. Расстояние от Маши до мысленной «зазеркальной Маши» вдвое больше, чем до зеркала, а тогда и рост «зазеркальной Маши» (равный росту настоящей Маши) вдвое больше длины отрезка AB (высоты Машиного рисунка на зеркале).



ШЕРЛОК ХОЛМС И «ТЕРПСИХОРА»

Ответим сначала на 2-й вопрос, потом на 3-й, и затем – на 1-й. Имена персонажей используем исходные, как в более раннем комиксе.

2) Оказывается, можно узнать, кто с кем танцует, без информации о суммарном возрасте.

В самом деле, каждая девушка на 3 года моложе своего партнёра. Поэтому если девушке n лет, то её партнёру $n+3$ лет, а в сумме им $2n+$ $+3$ лет – нечётное число. Тогда, поскольку Юле вместе с Игорем 36 лет, они *не партнёры*, а так как Антону вместе с Юлей 40 лет, они *тоже не партнёры*. Значит, для Юли партнёром может быть только Максим. Одна пара определена.

Далее, Игорю вместе с Юлей в сумме меньше лет, чем Антону вместе с Юлей ($36<40$). Тогда Игорь *моложе* Антона. Но раз каждая девушка на 3 года моложе своего партнёра, то чем моложе партнёр, тем моложе и партнёрша. Стало быть, партнёрша Игоря моложе партнёрши Антона. Из двух оставшихся девушек моложе Ира – об этом говорит Максим. Итак, Ира танцует с Игорем, а Светлана – с Антоном.

Нам удалось однозначно распределить всех танцоров по парам. Теперь понятно, почему слова о суммарном возрасте были выброшены – кому нужна лишняя информация?

3) Впрочем, такая ли она лишняя? Конечно, определить все танцевальные пары можно и без неё. Но зато она позволяет сверх того выяснить *возраст* каждого участника!

Убедимся в этом. Пусть Игорю, Антону и Максиму соответственно x, y и z лет. Так как каждая девушка моложе своего партнёра на 3 года и все пары нам уже известны, то Ире, Светлане и Юле соответственно $x-3$, $y-3$ и $z-3$ лет. Далее, Юле вместе с Игорем 36 лет, поэтому $(z-3)+x=36$. Имеем первое уравнение. Антону вместе с Юлей 40 лет, значит $y+(z-3)=40$ – вот и второе уравнение. Ну а третье получаем именно из «ликвидированного» утверждения Игоря, что всем вместе 115 лет:

$$x+y+z+(x-3)+(y-3)+(z-3)=115.$$

К счастью, у системы из этих трёх уравнений единственое решение: $x=19$, $y=23$, $z=20$. Итак, Игорю 19 лет, Антону – 23, Максиму – 20. Их партнёршам на 3 года меньше, и потому Ире – 16 лет, Светлане – 20, Юле – 17.

Как следствие, логично было бы на месте создателя первого комикса к заключительным словам корреспондента: «Но всё-таки, кто с кем танцует?» добавить: «И кому сколько лет?». Задача бы слегка усложнилась, и информация о суммарном возрасте не пропала бы даром.

1) А на первый вопрос можно ответить абсолютно точно, заглянув в решение исходного комикса, напечатанное в том же номере «Кванта». Там изложено буквально следующее:

«Обозначим возраст Игоря через x, возраст Антона через y и возраст Максима через z. Тогда всем шестерым танцорам будет $2(x+y+z)-9=115$ лет, так как каждая девушка на 3 года моложе своего партнёра. Отсюда следует также. что Юля не может быть партнёршей ни Игоря, ни Антона, так как суммы их возрастов – чётные числа, и, следовательно, возрасты не могут отличаться на 3. Итак, Юля – партнёрша Максима, ей $z-3$ лет, Игорю $39-z$ лет, Антону $43-z$ лет. Подставляя полученные значения для x и y в первое уравнение, получаем $z=20$, $y=23$, $x=19$. Таким образом, самый молодой – Игорь, с ним танцует Ира, а Светлана танцует с Антоном».

По сути, здесь решается та же система, что мы составили при ответе на 3-й вопрос. Правда, автор не стал доводить решение до конца, ведь ему надо было лишь выяснить, кто из партнёров самый молодой (именно с ним танцует Ира). Выходит, создатель исходного комикса считал выяснение возрастов участников *необходимой вспомогательной* задачей для выяснения того, кто с кем танцует. Потому он и не спрашивал, кому сколько лет, считая, что решающим всё равно придётся это определить, хотя бы частично. Оказалось – не обязательно!

P.S. Хотелось бы также узнать, *кто именно* был автором первоначального комикса (не художником, конечно, а создателем самой идеи). Скорее всего это Анатолий Павлович Савин, который в те годы был ведущим раздела «Квант для младших школьников».

СТО ОДЁЖЕК

Многие названия спортивной одежды пришли в русский язык как часть формы – футбольной, для игры в гольф и др. Но название коротких штанов *бриджи* не связано с карточной игрой *бридж*. *Манта* – название гигантского ската. Название *толстовка* появилось благодаря последователям учения Льва Толстого.

ИСТОРИКО-АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Вспомнив, что Плутон после открытия был причислен к планетам, а позже «разжалован» и выведен из этой категории, можно дать такие ответы: а) Нептун; б) Плутон; в) Нептун.

Но ответы эти верны только частично. Действительно, Плутон был открыт в 1930 году, и потому в 1920 году самой удалённой от Солнца планетой считался Нептун (открытый ещё в XIX веке). А в 2006 году решением Международного астрономического союза Плутон был исключён из списка планет и причислен к малым планетам. Так что ответ в пунктах «а» и «в» верен. С пунктом же «б» ситуация иная. Хотя Плутон в 1980 году и считался планетой, он был самым удалённым от Солнца только в среднем, поскольку его орбита сильно вытянута. В некоторые периоды он ближе к Солнцу, чем Нептун. Последний раз такое имело место с февраля 1979 года по февраль 1999 года, и в частности – в 1980 году. Итак, в пункте «б» верный ответ тот же: Нептун. А значит, во всех пунктах ответ одинаковый.