НАШ КОНКУРС, XI ТУР

(«Квантик» № 7, 2018)

51. *Двум братьям сейчас 25 и 36 лет. Они заметили, что оба их возраста одновременно являются точными квадратами. Могло ли с ними такое быть и раньше?*

Ответ: да. Если сейчас у братьев разница возрастов 11 лет, то в другие дни года она может быть 10, 11 или 12 лет. Перебирая все пары точных квадратов от 1 до 36, найдём ещё лишь одну пару с такой разницей: 4 и 16.

52. *По контуру клетчатого квадрата 11×11 отмечены узлы сетки. Играют двое. Первый проводит во внутренней клетке квадрата диагональ, один конец которой уже отмечен, а второй конец – ещё нет, и отмечает второй конец. Второй игрок проводит диагональ клетки, соединяющую отмеченные узлы. Запрещается в одной клетке проводить две диагонали. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?*

Первый может выиграть, если первым ходом проведёт диагональ из угловой клетки квадрата, а дальше будет её продолжать. Второй тогда сможет сделать лишь 5 ходов.

53. *Два джентльмена прогуливаются по бульвару. Они начали прогулку одновременно из противоположных концов и впервые встретились в 50 метрах от середины бульвара. Дойдя до конца бульвара, каждый сразу поворачивает и идёт обратно с той же скоростью. Джентльмены встретились лицом к лицу ещё дважды, после чего один догнал другого в конце бульвара. Найдите длину бульвара.*

Ответ: 700 м. Один прошёл бульвар столько раз, сколько встретился лицом к лицу со вторым, а второй прошёл бульвар на один раз больше, когда догонял первого. Значит, их скорости относятся как 3 к 4. Поделив бульвар на 7 равных частей, отметим расстояние от середины бульвара до точки их первой встречи. Оно равно половине одной части или 50 м по условию. Значит, длина бульвара $50\,\text{м} \times 14 = 700\,\text{м}$.

54. *Можно ли так «перемешать» кубик Рубика, что все цвета останутся прежними, кроме центральных квадратиков – те поменяют цвет на цвет противоположного квадратика?*

Ответ: нет. Покажем, что можно считать, будто центральные квадратики граней насажены на «иглы ежа»: этот «ёж» (белый на рисунке 1) представляет собой 6 стержней, торчащих из одной точки вверх-вниз, вправо-влево и вперёд-назад.

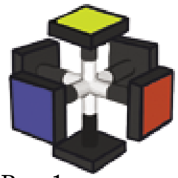


Рис. 1

Когда мы вращаем боковую грань, её центральный квадратик просто крутится на своей иголке, а сам ёж остаётся неподвижным, и концы иголок сохраняют свой цвет. Когда мы повернём среднюю грань, мысленно можно считать, что мы повернули и боковые иголки (их цвет от этого не изменится), то есть можно считать, что мы повернули всего ежа целиком.

Итак, ёж не мешает «перемешиваниям» кубика, и можно считать, что ёж двигается при этом как единое целое (кстати, кубик Рубика обычно так и устроен). Будем следить только за ежом и цветом концов его иголок (остальные детали кубика мысленно можно удалить).

Расположим ежа так: жёлтый квадратик вверху, на нас смотрят соседние синий и красный квадратики именно в этом порядке (рис. 1).

Если поменять все центральные квадратики на противоположные, жёлтый квадратик окажется внизу, синий и красный квадратики снова будут соседями, и если повернуть их к нам, снова слева будет синий, а справа красный. Но если теперь перевернуть кубик жёлтым квадратиком вверх, синий и красный квадратики будут смотреть на нас в другом порядке: слева красный, справа синий (рис. 2). Другими словами, ёж с раскрашенными концами иголок перейдёт в своё зеркальное отражение.

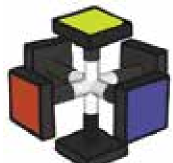


Рис. 2

Попробуем первого ежа (с цветными концами) совместить со вторым. Расположим оба «ежа» жёлтыми квадратиками вверх, синими – прямо на нас. Тогда красные квадратики у «ежей» не совместятся (в одном случае красный будет справа от синего, а в другом – слева). Значит, даже ежей совместить нельзя, и тем более – из кубика получить такой же с перекрашенными центральными квадратиками.

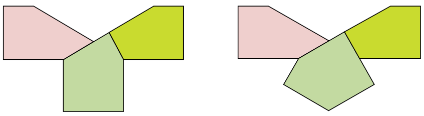
Свойство не совмещаться со своим зеркальным отражением называют *хиральностью*: им обладают наши руки, многие молекулы (см. статью «У зеркала», «Квантик» № 6, 2017).

55. *В непрозрачном мешке лежат в беспорядке фигурки пентамино 12 разных цветов,* *по 12 комплектов каждого цвета, – всего 1728 фигурок. Незнайка наугад достаёт одну за другой пентаминошки из мешка. Его цель – либо отыскать по одному экземпляру 12 фигурок разной формы (не важно, какого цвета), либо 12 каких угодно одноцветных фигурок, либо 12 одинаковых по форме фигурок каких угодно цветов. Какое наименьшее число фигурок должен вытащить Незнайка, чтобы гарантированно достичь цели?*

Ответ: 122. Если он вытащит всего 121 фигурку, то может случиться так, что среди них окажется по 11 разных фигурок 11 разных цветов, и цель достигнута не будет. Если же вытащены 122 фигурки, то либо среди них есть все формы фигурок (и тогда Незнайка собрал по одному экземпляру), либо какой-то формы нет. Тогда на не более чем 11 форм приходится 122 фигурки, поэтому какая-то форма представлена не менее чем 12 экземплярами.

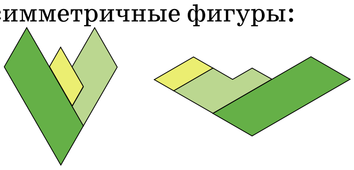
«ПЕРЕСТРОЙ-ка!» И ДРУГИЕ ГОЛОВОЛОМКИ («Квантик» № 8, 2018)

«СИММЕТРИКС 11–12»

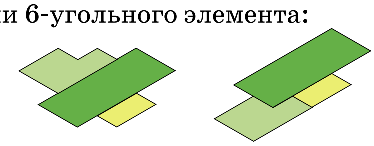


«ПЕРЕСТРОЙ-ка»

Просто симметричные фигуры:



Следующие две фигуры (с разным типом симметрии) получаются одна из другой при перемещении 6-угольного элемента:



ВЕТКА ДЕРЕВА

Полосы на остальных фото напоминают следы от стекающей по стволу жидкости: они направлены так, как стекала бы вода. Этого достаточно, чтобы разобраться с аналогичными полосами на коричневой ветке. Ведь тогда полосы, обогнув бока ветки, направляются вниз вдоль по ней. Поэтому место, от которого полосы расходятся (отмечено красным), самое высокое.

НА ВКУС И НА ЦВЕТ

Узоры *в горошек*, *в ёлочку*, *в огурцах* могут быть расцветкой, но *в яблоках* – относится только к масти лошадей. *Зольный* – серый (пепельный), *муравый* – зелёный (как трава-мурава, но не от слова *муравей*), *нагой* – телесный.

XXIV ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А. П. САВИНА. Избранные задачи

1. Ответ: шестиклассники выиграли на 3 боя больше.

Пусть перед турниром у всех пятиклассников в сумме было столько же конфет, сколько у шестиклассников, а после боя побеждённая команда отдаёт победителю конфету. Сравним количество конфет у пятиклассников и у шестиклассников после турнира. Ничейные бои и бои между командами одного и того же класса не изменили количество конфет у пятиклассников и шестиклассников. Пятиклассники получили на 7 конфет больше, чем шестиклассники, а отдали на 13 конфет больше, чем шестиклассники. Следовательно, у них стало на $13-7=6$ конфет меньше, чем у шестиклассников. Так как каждый бой, где шестиклассники победили пятиклассников, увеличивает разницу на две конфеты, то таких боёв было на 3 больше, чем боёв с противоположным исходом.

2. Ответ: 50.

Оценка. Рассмотрим двух спортсменов, занявших соседние места. Если их обоих не дисквалифицируют, то они по-прежнему будут занимать соседние места и передвинутся на одинаковое количество мест. Таким образом, хотя бы одного из них должны дисквалифицировать. Следовательно, количество дисквалифицированных должно быть не меньше 50.

Пример. Если дисквалифицируют всех спортсменов, стоявших на нечётных местах, то спортсмен, занимавший место $2N$, займет место N. Таким образом, оставшиеся передвинутся на различное количество мест.

3. Ответ: через 3 минуты. Поскольку трактор движется вдвое быстрее Жени, скорость их сближения втрое быстрее скорости Жени. То есть Женя остановится, уступая дорогу трактору, через 20 секунд после того, как остановилась Саша. Пропустив трактор, Женя дойдёт до места, где Саша пропускала трактор, за 80 секунд по целине (так как по лыжне дошла бы за 40 секунд). К этому моменту Саша прокладывала лыжню после встречи с трактором уже $80+20=$ $=100$ секунд, так как она потратила столько же времени на пропуск трактора, сколько и Женя.

После этого скорость Жени будет вдвое больше скорости Саши, то есть скорость сближения будет равна скорости Саши, и они встретятся ещё через 100 секунд.

4. Ответ: 8. Рассмотрим два случая расположения кубиков: 1) слева оба раза лежит один и тот же кубик; 2) кубики поменяли местами.

1) Этот случай не удовлетворяет условию, так как у левого кубика на задней грани одно и то же количество точек на каждом фото, а у правого кубика на задней грани на разных фото количество точек различается. Следовательно, суммарное количество точек на паре задних граней не может быть одинаковым.

2) У левого кубика на первом фото грани с 1 и 2 точками соседние. Запомнив, как именно расположены точки на этих гранях (друг относительно друга), посмотрим на этот же кубик на втором фото (там он справа). Ясно тогда, что напротив единичной точки может быть только 3 точки, а напротив двух точек – либо 4, либо 6.

Аналогично, у другого кубика напротив трёх точек – либо 5, либо 6, а напротив одной точки – 2. Тогда сумма точек на задних гранях на левом фото: 8 или 9, а на правом: 6 или 8.

Значит, искомое количество точек равно 8.

5. Ответ: могут. Пример приведён на рисунке 1.

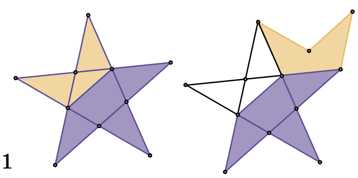


Рис. 1

6. Ответ: нельзя. После первого шага на доске будет 5 единиц и 2 двойки. Далее после каждого шага, очевидно, сохраняется такое свойство: количество наибольших чисел на доске чётно. Поэтому 7 равных чисел получить нельзя.

7. Ответ: 12. Заметим, что любая сторона единичного квадрата – это отрезок с концом в середине ребра данного куба. В кубе 12 рёбер и каждая середина ребра может быть использована не более одного раза. Значит, можно покрасить не более 12 отрезков, соблюдая требуемое условие.

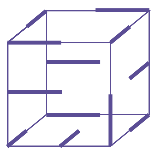


Рис. 2

На рисунке 2 приведён пример, когда покрашенных отрезков ровно 12.

8. а) Так как проволоку сгибать нельзя, после спайки должны получиться кубы с меньшей длиной ребра. Тогда каждое ребро куба должно быть разрезано. Значит, частей не меньше, чем 8 (количество вершин куба).

Разрезав каждое ребро посередине, получим 8 одинаковых частей (рис. 3, *а*). Из каждых четырёх можно спаять куб, не сгибая проволоку (рис. 3, *б*).

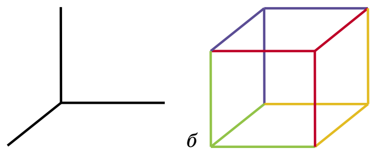


Рис. 3 *а* *б*

б) Достаточно разрезать на две части. Покажем два различных способа, считая, что ребро данного куба имеет длину 2.

Первый способ. Разрежем куб, «перекусив» пополам четыре параллельных ребра. Получим две одинаковые фигуры в виде «столика»: столешница – квадрат со стороной 2 и четыре ножки длины 1 (рис. 4, *а*). Покажем, как из этой фигуры спаять каркас единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4, *б*). Из столешницы согнём контур $AA_1B_1BCC_1D_1DA$, а ножки пойдут на четыре оставшихся ребра.

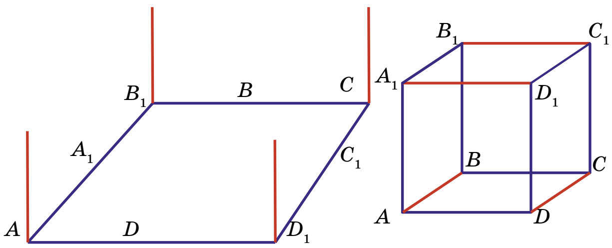


Рис. 4 *а* *б*

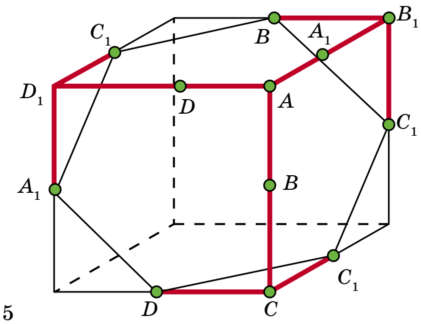


Рис. 5

Второй способ. Разрежем куб плоскостью, сечение которой – правильный шестиугольник. Получатся две одинаковые части. На рисунке 5 показано, в каких точках надо согнуть одну из частей (красную), чтобы получился каркас единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (точки с одинаковыми названиями надо совместить).

9. Ответ: 0. Так как оба числа делятся на 3, то суммы цифр в числах ДЮЖИНА и ГРОСС также делятся на 3. Следовательно, и сумма этих сумм делится на 3. В этой сумме участвуют десять различных букв, причём буква С – дважды. Следовательно, такая сумма равна $С + (0 + 1 + ... + 8 + 9) = С + 45$, откуда следует, что С кратно трём. Кроме того ГРОСС делится на 4, поэтому $С = 0$.

Числа из условия существуют, например, ДЮЖИНА = 345978, ГРОСС =21600.

10. Ответ: можно. Возьмём 1000 одинаковых кубиков. Расположим 100 кубиков в виде квадрата размером 10×10 и впишем в них числа от 1 до 100 (в первой строке – числа от 1 до 10 по возрастанию, во второй – от 11 до 20 по возрастанию, и т.д.). В следующие 100 кубиков впишем числа от 101 до 200, расположив их аналогично, после чего наложим этот квадрат $10\times\times10$ вторым слоем на предыдущий. Аналогично создадим третий слой, четвёртый, и т.д., до десятого. Получим куб размером $10\times10\times10$, в котором числа, стоящие в соседних кубиках одного слоя, отличаются на 1 или на 10, а числа в соседних кубиках разных слоёв – на 100.

Рассмотрим произвольный кубик размером $2\times2\times2$. Зачеркнём число в одном из составляющих его единичных кубиков и в трёх соседних с ним (они как раз отличаются на 1, 10 и 100). Останется 4 единичных кубика, которые также можно вычеркнуть одним действием, согласно условию задачи. Таким образом, двумя действиями можно вычеркнуть весь кубик $2\times2\times2$, а куб $10\times10\times10$ на такие кубики легко разбивается.

11. Ответ: $AP : PD = 3 : 1$. Пусть O – середина AD (центр правильного шестиугольника), K – середина AB. Из условия задачи и симметрии относительно AD следует, что $PK = PF = PB$ (рис. 6). Значит, треугольник BPK – равнобедренный.

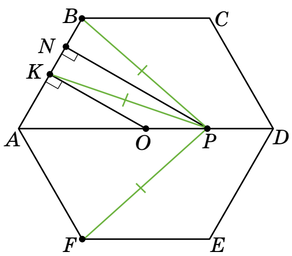


Рис. 6

Проведём отрезок OK и высоту PN треугольника BPK, которая является и его медианой. Так как $OK \perp AB$, то $OK \| PN$. Тогда $AO : OP = = AK : KN = 2 : 1$ по теореме о пропорциональных отрезках. Так как $AO = OD$, то $AP : PD = 3 : 1$.

Вместо теоремы о пропорциональных отрезках можно также использовать тот факт, что $\angle APN = 30°$, поэтому $AP = 2AN = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{4}AD$.

12. Заметим, что у прямоугольного семиугольника есть хотя бы два соседних прямых угла. Следовательно, от него можно отрезать прямоугольник и оставшаяся часть будет опять же прямоугольным семиугольником. Прямоугольник можно разрезать на три прямоугольника, а каждый прямоугольник разрезать на два прямоугольных семиугольника, например, так, как показано на рисунке 7.

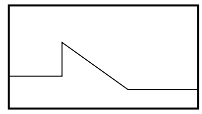


Рис. 7

13. Ответ: 9 нарушителей. Всего было оставлено 95 следов. У Джо – 6 следов протеза, значит, другая нога могла оставить 5, 6 или 7 следов (в сумме – от 11 до 13 следов у Джо). Тогда возможны 4 варианта пересечения полосы нарушителями. Нарушители могли сделать: 1) одни 10 шагов, а другие – 11; 2) одни 11 шагов, а другие – 12; 3) одни 12 шагов, а другие – 13; 4) одни 13 шагов, а другие – 14.

Рассмотрим каждый из вариантов, «разложив» 95 на сумму: сколько нарушителей сделали первое число шагов, и сколько – второе. Несложно установить (с помощью перебора или оценки), что для каждого варианта существует не более чем один способ:

1) $95 = 10\cdot4 + 11\cdot5$; 2) $95 = 11\cdot1 + 12\cdot7$;
3) невозможно; 4) $95 = 13\cdot3 + 14\cdot4$.

В зависимости от того, какую ногу Джо заменяет протез, всего отпечатков левых и правых ног было либо 45 и $44 + 6 = 50$, либо $45 + +6 = 51$ и 44 соответственно. Нарушители, сделавшие чётное количество шагов, сделали поровну шагов левой и правой ногой. А те, кто сделали нечётное количество шагов, меняют разницу между общим количеством левых и правых отпечатков на 1. Значит, количество нарушителей, сделавших нечётное количество шагов, не меньше разности между количеством левых и правых отпечатков, то есть не меньше чем 5 в первом случае и не меньше чем 7 во втором. Следовательно, возможен только первый вариант: 9 нарушителей, из которых четверо сделали по 10 шагов и пятеро – по 11.