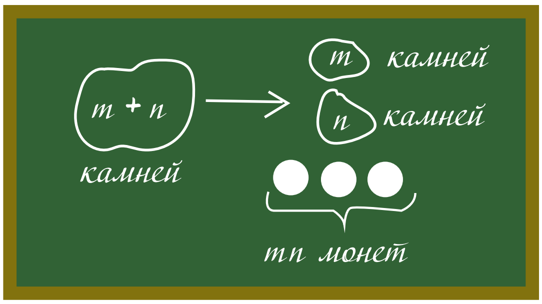
Виктор Клепцын

Добрыня и куча камней

На математическом кружке учитель только что закончил записывать условие задачи:

Есть куча из 1001 камня. Каждый раз, когда богатырь Добрыня делит кучу камней на две, царь платит ему столько монет, каково произведение количеств камней в двух получившихся кучах. Как должен действовать Добрыня, чтобы получить как можно больше?



И сразу ученики заспорили.

– Ясно, что первым делом нужно поделить кучу почти пополам: тогда Добрыня сразу получит аж 500 · 501 монет. Потом меньшие кучи поделим ещё пополам и т.д. А нам нужно будет весь этот заработок сложить. Только вот как? – сказала Женя.

– А кто тебе сказал, что этот путь самый выгодный? Пару раз сорвёт куш, а потом будет он у тебя, скажем, десятимонетные кучки пополам делить, по 25 монет за раз получая. А у меня Добрыня по одному камню брать будет. Тысяча монет на первом ходу, 999 на втором, 998 на третьем... Тише едешь – дальше будешь! – ответил ей основательный Мика.

– Это что же, нам сейчас нужно будет всё это складывать, чтобы сравнить? – Перспектива вычислять сумму тысячи слагаемых Женю явно не обрадовала.

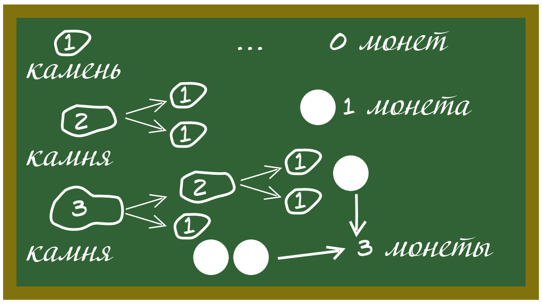
– Не торопитесь, – вмешался учитель. – Вы ещё не «вжились» в задачу. Не спешите отвечать именно на заданный вопрос, попробуйте её «покрутить» и поэкспериментировать, поймите, что происходит.

– Поэкспериментируешь тут, когда каждый раз тысячу чисел складывать надо, – не согласилась Женя.

– Правильно. Поэтому для начала измените задачу. Число 1001 слишком большое, возьмите число поменьше и разберитесь с ним. А там, глядишь, и на исходный вопрос ответите.

– Один – замечательное число! Один камень в куче, делать ничего не надо, красота! Правда, и заработать у Добрыни не выйдет, – откликнулся на это предложение Мика.

– Два камня принесут Добрыне одну монету, тут без вариантов. А если их три, то $2 + 1 = 3$ монеты, – подхватила эстафету обрадовавшаяся Женя.

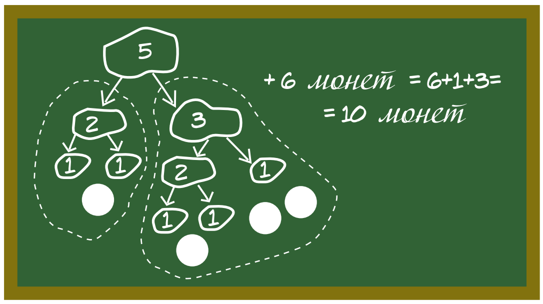


– Пусть теперь камней четыре. Если Добрыня поделит их пополам, а потом кучки опять пополам, как ты предлагаешь, то заработает $2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4 + 1 + 1 = 6$ монет, – продолжил Мика.

– А если будет оттаскивать по одному камню, как предлагаешь ты, то $3 + 2 + 1$. Опять 6 монет! – удивилась Женя.

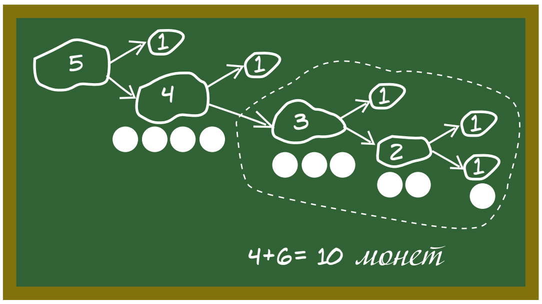
– А других вариантов нет. Смотрим на 5 камней?

– Смотрим! Если их поделить как $5 = 2 + 3$, то Добрыня заработает $2 \cdot 3 = 6$ монет первым ходом, а потом одну монету за кучку из 2 камней и три монеты за кучку из трёх. Итого $6 + 3 + 1 = 10$ монет. А у тебя?



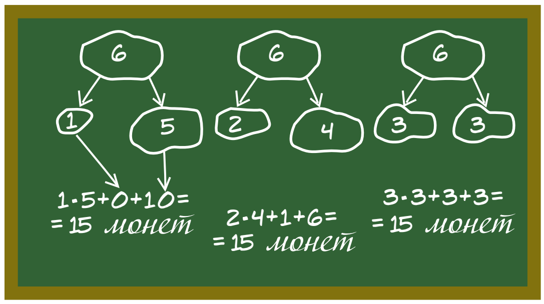
– Берём один камень и сводим задачу к предыдущей. Получается 4 мо-

неты сразу и 6 потом. Итого $4+6=10$. Опять 10! – Настал черёд и Мики удивиться.



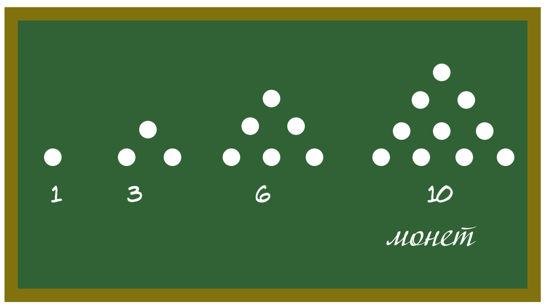
– Опять совпадение… А любое совпадение подозрительно. И должно быть исследовано! – подхватила Женя. – А не может ли так статься, что итоговый результат вообще не зависит от действий Добрыни? Ну, если только он не поленится и разберёт всё до конца?

– Проверим для 6 камней! – поддержал Мика. – Первым ходом Добрыня может поделить их как $1+5$, $2+4$ или $3+3$. Кучка из 2 камней приносит ему 1 монету, из 3 – три, из 4 – шесть, а из 5 – десять. Посмотрим-посмотрим:



– Таких совпадений не бывает, мы были правы! – обрадовалась Женя. – Осталось это доказать. Где-то я эти числа видела: 1 монета, 3, 6, 10, 15…

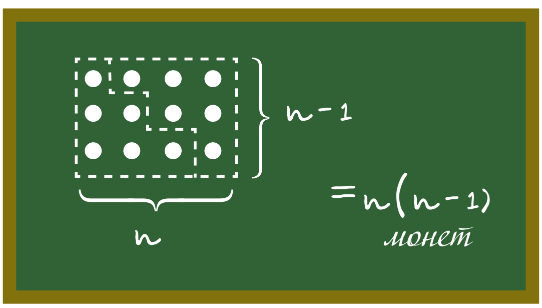
– Да это же треугольные числа: ведь если Добрыня будет работать так, как я сказал, начав с кучки из n камней, он заработает сумму последовательных чисел $(n-1)+(n-2)+...+2+1$.



– Мы готовы сформулировать гипотезу, – обращаясь к учителю, Женя взяла на себя роль капитана. – Итоговый результат не зависит от действий Добрыни: когда куча из n камней будет полностью разобрана, он получит $1+2+...+(n-1)$ монет.

– Отлично! – обрадовался учитель. – Вот вы и разобрались с тем, что в задаче происходит. Остаётся доказать. Сможете?

– Ну, это уже несложно, – подхватил Мика. – Сначала соберём треугольное число в более аккуратный вид: эта сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Потому что если её удвоить, то монеты можно выложить в прямоугольник $n\times(n-1)$:



– А теперь посмотрим, – продолжил он. – Если сначала монет $n=a+b$ и Добрыня делит их на кучки из a и b монет, то первым ходом он заработает ab монет, а потом ещё $\frac{a(a-1)}{2}$ из первой и $\frac{b(b-1)}{2}$ из второй кучек. Всего

$$ab+\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}=\frac{2ab+a^2+b^2-a-b}{2}=$$
$$=\frac{(a+b)^2-(a+b)}{2}=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

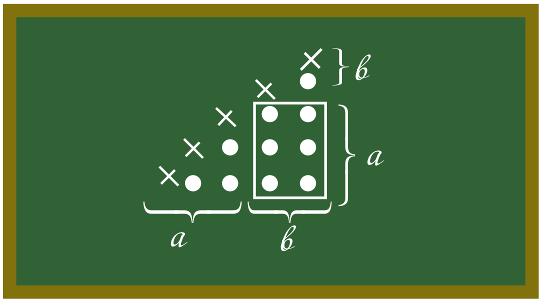
– Ура! – обрадовался Мика.

– Формулы, формулы... А почему всё же так хорошо совпало, что от действий Добрыни ничего не зависит? Нет ли этому какого-то хорошего объяснения? – задумалась Женя. – Ведь...

– Совпадения подозрительны! – подхватил Мика. – Может, получится это объяснить как-то геометрически? Ведь треугольное число – это когда складывают монеты треугольником; мы уже их так складывали, вычисляя, чему треугольное число равно.

– Но в таком треугольнике можно найти два меньших, соответствующих двум получающимся кучам из a

и b монет! А останется как раз прямоугольник, и будет там как раз ab монет! – обрадовалась Женя.



– Хорошо, это мы упростили рассуждение, обойдясь без формул. И получили красивое доказательство, почему формула работает; но хотели-то мы объяснения, почему результат от действий Добрыни оказался не зависящим, – не спешил радоваться Мика.

– Ты прав. Давай ещё подумаем – что мы вообще о треугольных числах знаем? – не теряла энтузиазма Женя.

– Это ещё количество пар. В смысле, сколькими способами можно выбрать два из n камней, – ответил Мика.

– Количество пар... Ну конечно! Смотри, количество пар из $a+b$ камней – это количество пар из a камней плюс количество пар из b камней плюс количество пар, в которых один камень из первой кучи, второй из второй. Это тождество мы и написали, – азартно заговорила Женя. – Вот тебе и объяснение! Давай свяжем верёвочкой каждую пару камней в исходной куче. И пусть верёвочки рвутся, когда камни оказываются в разных кучах. Тогда Добрыня, деля кучу на две, зарабатывает как раз столько монет, сколько верёвочек он разорвал. Но в конце, когда у нас n куч по одному камню, все верёвочки будут разорваны. Значит, он заработал столько монет, сколько исходно было верёвочек. Как бы он ни действовал!

– Молодцы! – подытожил учитель. – Только не забудьте вернуться к исходной задаче и дать на неё ответ.

– Легко! – подхватил Мика. – Заработает Добрыня $500 \cdot 1001 = 500500$ монет, как бы он ни действовал, лишь

бы не останавливался, пока все кучки не станут по одному камню.

– И ещё раз – молодцы! А теперь к следующей задаче...

Послесловие. Видимо, эту задачу о Добрыне правильно считать фольклорной – во всяком случае, автору не удалось найти её первоисточник. Вот несколько близких к ней:

1 (И. Изместьев). Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладёт камень, и числа камней в куче, из которой он берёт камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

2 (Е. Горский). На доске написаны по возрастанию два натуральных числа x и y ($x \leqslant y$). Петя записывает на бумажке x^2, а затем заменяет числа на доске числами x и $y - x$, записывая их по возрастанию. С новыми числами на доске он проделывает ту же операцию, и т.д., пока одно из чисел на доске не станет нулём. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на бумажке?

3 (Е. Горский, С. Дориченко). На доске написаны натуральные числа x, y и z. Петя пишет на бумажку произведение двух из них, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он делает ту же операцию, и т.д., пока одно из чисел на доске не станет нулём. Чему в этот момент равна сумма чисел на бумажке?

Подсказка к задачам 2 и 3: какой у них геометрический смысл?

Художник Алексей Вайнер