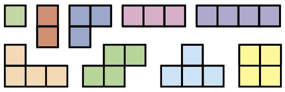
НАШ КОНКУРС, II ТУР (Квантик № 10, 2018)

6. *Найдите наименьшее такое натуральное число, что и в его записи, и в записи удвоенного числа встречаются все десять цифр от 0 до 9.*

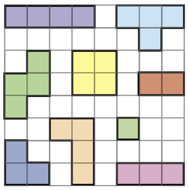
Ответ: $1023456789 \times 2 = 2046913578$. Наименьшее число из всех цифр от 0 до 9 подходит.

7. *В наборе присутствуют по одному разу всевозможные фигурки из одной, двух, трёх и четырёх клеток (см. рисунок).*



а) Выложите их «по клеточкам» на доску 8×8 так, чтобы никакие две фигурки не перекрывались и не касались даже углами (фигурки разрешается переворачивать).

б) Можно ли это сделать, если дополнительно требуется, чтобы на доске поместилась ещё одна одноклеточная фигурка, не имеющая общих точек с уже выложенными?

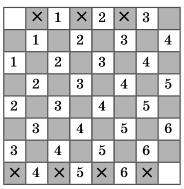


а), б). Пример, когда все фигурки выложены и есть место ещё для одной одноклеточной фигурки, приведён на рисунке.

8. *На планете Шелезяка в году 12 месяцев, во всех месяцах поровну дней. Её юному жителю Плексу меньше 100 лет. Возраст Плекса в годах представляется несократимой дробью, в числителе и знаменателе которой – квадраты целых чисел. А его возраст в месяцах – куб целого числа. Сколько Плексу лет и месяцев?*

Ответ: 2 года и 3 месяца. Пусть Плексу x^3 месяцев. Тогда ему $x^3/12$ лет. По условию $x^3/12 = m^2/n^2$. Перепишем это равенство в виде $n^2x^2x = m^2 \cdot 4 \cdot 3$. Разложим обе части на простые множители. Справа в нечётной степени стоит только 3. Значит, и слева тоже, откуда $x = 3y^2$, где y – целое. Если $y = 1$, то $x = 3$ и Плексу 2 года 3 месяца. Если $y \geqslant 2$, то $x \geqslant 12$ и Плексу не менее 144 лет, что неверно по условию.

9. *На шахматной доске 8×8 расставили 7 слонов так, чтобы никакие два не били друг друга. Обязательно ли после этого удастся переставить каждого слона на другое поле ходом коня так, чтобы в новой расстановке никакие два слона по-прежнему не били друг друга?*



Ответ: нет. Контрпример см. на рисунке (слоны это крестики). Действительно, после перестановки слонов ходом коня каждый слон поменяет цвет поля, на котором стоит, причём ни один слон не попадёт в угловые клетки доски. Тогда все слоны окажутся на 6 диагоналях (они обозначены цифрами). Поскольку слонов 7, два из них попадут на одну диагональ и будут бить друг друга.

10. *а) В зале музея стоят по кругу 5 одинаковых шкатулок. Каждый вечер начальник охраны запирает две шкатулки по своему выбору, положив в одну из них бесценный алмаз. Подкупленный работник музея видит действия начальника и хочет оставить взломщику подсказку, где алмаз. Для этого он открывает крышки ровно у двух незапертых шкатулок, а остальные не трогает. Как ему заранее договориться со взломщиком, чтобы тот, придя ночью в музей и увидев, у каких двух шкатулок открыты крышки, сразу понял, где лежит алмаз?*

б) Та же задача, но в зале стоят по кругу 33 шкатулки, начальник запирает 16 шкатулок, положив в одну алмаз; взломщик должен понять, где алмаз, по двум шкатулкам, у которых открыты крышки.

а), б) Мысленно будем считать, что шкатулки стоят по кругу через равные промежутки. Пусть работник откроет пару шкатулок, стоящих на одинаковом расстоянии от шкатулки с алмазом. Такая пара незапертых шкатулок всегда найдётся, потому что всего пар 16 (2 в пункте а), а начальник запер лишь 15 шкатулок (одну в пункте а), не считая той, в которой алмаз. Поскольку всего шкатулок нечётное число, для двух данных шкатулок найдётся единственная шкатулка на равном расстоянии от них, так что взломщик легко её найдёт.

СПИЧЕМАТИКА (Квантик № 11, 2018)

В задаче 1 нужно сломать спичку пополам и выложить из половинок крестик-умножение. В задаче 2 нужно сломать спичку около головки: часть с головкой – это запятая, остальное надо выбросить. В итоге получается:

1. $1 - 1 = 7 \cdot 0$

2. $6/5 = 1{,}2$

3. 67Р = \$1 (курс доллара к рублю в один из дней августа).

ЧЕТЫРЕ ТУЗА (Квантик № 11, 2018)

Квантик может положить взятую карту обратно на место двумя способами: либо тем же краем карты к себе, что и в начале, либо противоположным. Пусть он её кладёт не так, как она лежала до этого (что и произошло в комиксе).

Квантик сравнивает, как лежат открытые карты в конце фокуса и в начале. Если одинаково, он брал туз бубен – у этой карты два положения симметричны. В остальных случаях ровно одна карта будет лежать не так, как в начале – её-то и брал Квантик.

XIII ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР (Квантик № 11, 2018)

1. Ответ: в точке D. Из точки C гонщики поехали в разные стороны, каждый развернулся в какой-то момент, и следующая встреча произошла в точке D спустя время t после выезда из C. После этого *каждый поехал обратно по тому же самому пути, по которому приехал, и с той же скоростью*! Ясно, что они одновременно вернутся в точку C спустя то же время t, затем одновременно вернутся в D, и так будут поочерёдно встречаться то в C, то в D.

2. Ответ: 863179. Из цифр 0, 2, 4, 5, 6, 8 в искомом числе может быть не более двух, иначе хотя бы одно из трёхзначных чисел будет оканчиваться на одну из этих цифр и не будет простым. Поэтому в искомом числе не более 6 цифр (1, 3, 7, 9 и ещё две из 6 взятых выше цифр). Если в нём 6 цифр, то две первые цифры должны быть из 6 вышеперечисленных, а для наибольшего значения попробуем начать с 86. Далее число однозначно восстанавливается, так как $869 = 11 \cdot 79$, $867 = 3 \cdot 289$, $639 = 3 \cdot 213$, $637 = 7 \cdot 91$, $319 = 11 \cdot 29$ – составные. А числа 863, 631, 317 и 179 – простые.

3. Ответ: 6. Так как 9 толстых учебников помещаются на полке, 3 толстых учебника занимают не больше трети полки. Аналогично, 5 тонких учебников занимают не больше трети полки. Тогда 5 тонких учебников и 6 толстых занимают не больше $1/3 + 2/3$ полки, что равно 1, то есть с 5-ю тонкими поместится 6 толстых.

Докажем, что 7 толстых учебников уже не влезут. Так как 10 толстых учебников не помещаются на полке, толстый учебник занимает больше 1/10 полки. Аналогично, тонкий учебник занимает больше 1/16 полки. Тогда 7 толстых и 5 тонких учебников занимают больше $7/10 + 5/16$ полки, что равно 81/80 и больше 1.

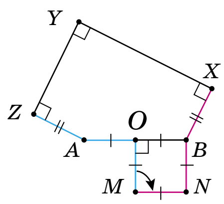
4. Ответ: 2018-я. Начнём с 1 и будем приписывать справа степени двойки по очереди. Заметим, что заведомо 12 делится на 2^1, 124 – на 2^2, и т.д.: приписывание 2^{k+1} справа к текущему числу можно описать как умножение текущего числа на не менее чем первую степень 10 (что даёт делимость на бо́льшую степень двойки) и прибавление 2^{k+1}, так что если текущее делится на 2^k, то следующее делится на 2^{k+1}.

Поэтому итоговое число делится на 2^{2018}. А на 2^{2019} не делится: при последнем приписывании оно получилось из числа, кратного 2^{2017}, умножением на более чем первую степень 10 (что даёт делимость хотя бы на 2^{2019}) и прибавлением затем числа 2^{2018} (на 2^{2019} не делится).

5. Рассмотрим прямой угол с вершиной O. Мы решим задачу, если на одном его луче отметим точку A на целом расстоянии d от O, а на другом луче – остальные 2017 точек на таких целых расстояниях от O, чтобы расстояния от A до всех них, кроме одной, были целыми.

Рассмотрим такие пары целых чисел (a, b), что $a > b$ и $2ab = d$. Для каждой такой пары можно взять точку на втором луче на расстоянии $a^2 - b^2$ от O. Тогда расстояние до A равно $\sqrt{(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2} = a^2 + b^2$, то есть оно целое. Пусть $d = 2^{4035}$. На втором луче возьмём 2016 точек на расстояниях от O, соответствующих парам $(2^{4033}, 2)$, $(2^{4032}, 2^2)$, ..., $(2^{2018}, 2^{2016})$, и ещё одну точку B на расстоянии 1 от O (так как $2^{2 \cdot 4035} + 1$ – не квадрат, AB не будет целым).

6. Докажем, что биссектрисы всех углов XYZ пересекаются в точке M, являющейся концом перпендикуляра, отложенного от середины стороны AB во внешнюю сторону пятиугольника на расстояние, равное половине AB.

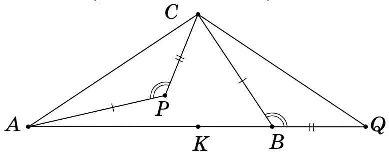


Так как $BX \perp XY$, $XY \perp YZ$, $YZ \perp ZA$, то $BX \perp ZA$. Повернём плоскость вокруг точки M на 90° так, чтобы точка A перешла в точку B. Тогда ломаная $MOAZ$ (см. рисунок) перейдёт в ломаную $MNBX$ (так как сумма углов OAZ, OBX и OBN равна 360° и M вне пятиугольника).

Но тогда прямые ZY и XY находятся на равном расстоянии от M (потому что перпендикуляр к прямой ZY перейдёт в перпендикуляр к прямой XY). Так как M находится внутри угла XYZ (обоснуйте с помощью выпуклости пятиугольника), из равенства расстояний следует, что M лежит на биссектрисе угла XYZ.

7. На продолжении стороны AB отложим отрезок BQ, равный CP. Тогда углы APC и CBQ

равны, а значит, треугольники APC и CBQ также равны по двум сторонам и углу между ними. Итак, $AC=CQ$, и $AK=KB+BQ=KQ$. Тогда CK – медиана в равнобедренном треугольнике ACQ. Значит, CK – высота, и $CK\perp AB$.

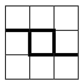


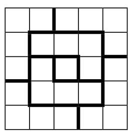
8. Ответ: $X=D$. Проведём из точки D три луча, продолжающих отрезки AD, CD и BD. Эти лучи делят плоскость на три части (в одной лежит вершина A, в другой – B, в третьей – C). Точка X лежит в одной из частей – пусть там, где A (другие случаи аналогичны). Тогда D лежит в треугольнике BXC, откуда $XB+XC\geqslant DB+DC$ (докажите с помощь неравенства треугольника, продлив BD до пересечения с CX), и $XA+XD\geqslant DA$ по неравенству треугольника. Первое неравенство обращается в равенство лишь для $X=D$, то есть для других X сумма больше.

9. Ответ: 1. Одна тройка всегда есть: подходят диагональ a наибольшей длины и выходящие из её концов диагонали b и c (так как b и c пересекаются, то $b+c>a$, но $a\geqslant b$ и $a\geqslant c$, откуда все неравенства треугольника выполнены).

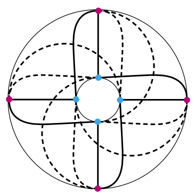
Вот пример, когда удачная тройка одна. Возьмём правильный треугольник ACE со стороной 1, проведём прямую через середины AC и CE и на этой прямой выберем точки B и D так, чтобы $ABCDE$ был выпуклым и $BE=100$, $AD=10000$. Диагонали пятиугольника $ABCDE$ равны тогда 1, 1, 100, 10000, а пятая диагональ (BD) заведомо не меньше 10001 (докажите!), и треугольник смогут образовать лишь три наибольшие диагонали.

10. Указание: квадраты 3×3 и 5×5 без центральной клетки режутся на данные фигурки (см. рисунки). Докажите, что квадратная рамка с нечётной стороной и толщиной в две клетки режется на две данные фигурки и прямоугольники 2×4 (составленные из двух фигурок).





11. Ответ: можно, см. рисунок.



12. Ответ: 2,5 минуты. Такое время получится, если все муравьи поползут по кратчайшему пути в середину одного и того же ребра.

Докажем, что меньшего времени не хватит. Рассмотрим последнюю встречу, назовём встретившихся там муравьёв «финалистами». Точка встречи K лежит на каком-то ребре и отстоит от одной из вершин куба не менее чем на 2,5 ребра; пусть в этой вершине изначально сидел муравей Петя. Если Петя – финалист, то прошло не меньше 2,5 минут от начала. Если Петя не финалист, возьмём любого финалиста – Петя с ним уже встретился и если бы полз после той встречи вместе с финалистом, то попал бы в K как раз к моменту последней встречи, то есть прошло бы не менее 2,5 минут.

13. Ответ: при всех натуральных $k\leqslant n^2$.

Рассмотрим самую верхнюю строку с чёрными клетками. Возьмём в ней самую левую чёрную клетку A и отрежем прямоугольник, состоящий из A и всех клеток, которые не правее и не ниже A. Двигаясь далее по строке, дойдём до следующей чёрной клетки B и отрежем прямоугольник, состоящий из B и всех ещё не отрезанных клеток, которые не правее и не ниже B, и т.д. Дойдя до последней чёрной клетки в строке, отрежем прямоугольник из всех оставшихся клеток, которые не ниже этой клетки. В отрезанных прямоугольниках по одной чёрной клетке, и мы уменьшили высоту доски. Смещаемся в следующую строку с чёрными клетками и действуем аналогично. Дойдя до последней такой строки, будем включать в прямоугольники все оставшиеся клетки, которые не правее очередной чёрной клетки.

14. Ответ: 8. Двух (и более) рыцарей быть не может, потому что они ответят одинаково друг про друга. Значит, рыцарь не может дать ответ «Знакомый рыцарь», поэтому все, кто так ответит – точно лжецы. Среди ответов любых двух лжецов друг про друга найдётся ответ «Знакомый рыцарь», потому что среди остальных двух возможных вариантов ответа один верный. Так мы определим всех лжецов, кроме, быть может, одного – итого хотя бы 8 человек.

Пусть среди 10 человек один рыцарь, и один лжец прикидывается рыцарем; назовём его псевдорыцарем. Пусть все остальные лжецы знакомы с псевдорыцарем и незнакомы с рыцарем, и говорят про рыцаря и про псевдорыцаря «Знакомый рыцарь». А рыцарь и псевдорыцарь, в свою очередь, говорят про остальных лжецов «Не знаю». Тогда псевдорыцарь и рыцарь могут быть знакомы или нет, и если в первом случае рыцарь скажет «Это мой знакомый лжец», а псевдорыцарь – «Я его не знаю», а в другом – наоборот, мы их никак не отличим.

15. Пусть у Даши n друзей. Тогда её 5 фото получили более $5n/2 > 2n$ лайков. Поэтому найдётся друг, поставивший хотя бы три лайка – скажем, фото 1, 2, 3. Для фото 4, 5 найдётся друг, поставивший лайки им обеим. Вместе с первым другом они дают нужную пару (либо это один человек, поставивший 5 лайков, тогда второго друга выбираем произвольно).

16. Ответ: 76, $3\cdot26$, $5\cdot16$, $15\cdot6$, $25\cdot4$, $75\cdot2$. Заметим, что если двое дружат, то любой другой либо дружит с обоими, либо ни с кем из них. Значит, джентльменов можно разбить на группы, в которых каждый дружит с каждым, а люди из соседних групп не дружат между собой. Тогда в клубе вне каждой группы будет 75 человек (враги любого из этой группы). Значит, в группах людей поровну. Пусть групп всего k, в каждой n человек. Тогда $n(k-1)=75$, и, перебирая разложения 75 на множители, находим возможные варианты: $n=1$, $k=76$; $n=3$, $k=26$; $n=5$, $k=16$; $n=15$, $k=6$; $n=25$, $k=4$; $n=75$, $k=2$; все они подходят.

17. Ответ: у второго. Пусть если из какого-то числа можно получить отрицательное, второй так и делает, а если нельзя, вычитает из числа, из которого своим последним ходом первый не вычитал. Тогда получим по индукции, что после $k \leqslant 98$ ходов числа будут $301-3k$ и $201-2k$. Поэтому после того, как каждый сделал 98 ходов, на доске останется 7 и 5. Далее легко разобрать все варианты ходов первого.

18. Перенумеруем места в шеренге числами от 0 от 2^n-1 и дадим каждому месту в шеренге шифр из n нулей и единиц – двоичное разложение его номера. Так, для $n=3$ шифрами будут 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Заметим, что у первой половины мест шифр начинается на 0, а у второй – на 1. Покажем, что по команде «Перестрой-СЯ!» солдат переходит по такому правилу: берёт шифр своего места, переставляет последнюю цифру в начало и следует на место с получившимся шифром (то есть с места $a_1a_2\ldots a_n$ идёт на место $a_na_1\ldots a_{n-2}a_{n-1}$).

Когда солдаты рассчитываются на первый-второй, «первые» – это те, у которых шифр места оканчивается на 0. По указанному правилу они заняли бы все места в первой половине шеренги, сохраняя порядок, то есть построились бы как раз так, как по команде «Перестрой-СЯ!». Аналогично, «вторые» фактически тоже пользуются указанным правилом.

Но тогда за n перестановок солдат с места с шифром $a_1a_2\ldots a_n$ перейдёт на место с тем же шифром, то есть вернётся в исходное положение.

19. Ответ: 5. Пример, когда троп 5, дан на рисунке 1. Чтобы доказать, что меньше 5 троп не хватит, раскрасим белые клетки в два цвета (жёлтый и красный) так, как показано на рисунке 2. Заметим, что жёлтых клеток 20, а красных 30, и есть лишь 5 пар соседних красных клеток. Если временно считать каждую из этих пар за одну красную клетку, получим, что в каждой слоновьей тропе красных клеток максимум на 1 больше, чем жёлтых. Если троп k, суммарно красных клеток в них тогда максимум на k больше, чем жёлтых, но вспомнив, что каждую из 5 пар соседних красных клеток мы могли посчитать за одну клетку, получаем в итоге, что красных клеток на доске максимум на $k+5$ больше, чем жёлтых. Но тогда $k+5 \geqslant 30-20=10$, откуда $k \geqslant 5$.

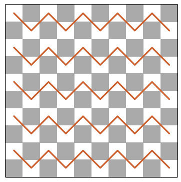


Рис. 1

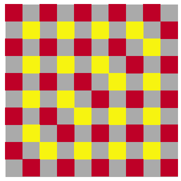


Рис. 2

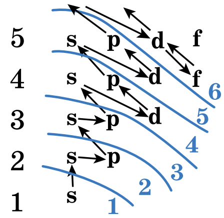
20. Ответ: $2n-1$ (можно покрасить весь левый столбец и всю верхнюю строку).

В каждой строке найдём расстояния от самой левой закрашенной клетки до остальных. Если в двух разных строках встретилось одно и то же расстояние, соответствующие клетки дают параллелограмм. И в одной строке все расстояния различны, так что каждое возможное расстояние встретится не более одного раза.

Самых левых клеток в строках не более n, а остальные клетки соответствуют различных расстояниям, которых не более $n-1$ (ведь расстояния целые и не превосходят $n-1$). Тогда всего закрашенных клеток не более $2n-1$.

ДОМ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ

1. Стрелки – порядок заполнения уровней, синие линии – границы горизонтальных рядов в таблице Менделеева. Синие цифры – номер ряда, на котором заполняются эти коридоры.



Иногда порядок движения по стрелкам чуть нарушается – см. задачи 2–4.

2. $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^5\ 4s^1$. Атом хрома –

как раз исключение из «правила стрелок»: при появлении 24-го электрона (и поселении его в d-коридоре третьего этажа) один электрон из уже было заполненного коридора 4s вдруг «сбегает» вниз, в коридор 3d. Так что на внешнем, четвёртом уровне – этаже – опять один электрон!

3. У атомов лантаноидов новые электроны «заселяются» в коридор f четвёртого этажа, который до сих пор пустовал. А у актиноидов – в коридор f пятого этажа. Поэтому эти клеточки в таблице покрашены новым, зелёным цветом. Место для f-коридора в таблице не предусмотрено, поэтому все лантаноиды – вся строка – в таблице «помещаются» в одну клеточку. Ту, которая соответствует одному электрону на этаже 5d. И действительно, у самого лантана новый, 57-й электрон поселяется на 5d. А уж следующие попадают на 4f, и единственный электрон с 5d «сбегает» к ним. Пока не заполнится весь этаж 4f, этот электрон так и переселяется то туда, то сюда. В итоге у нескольких лантаноидов на уровне 5d есть один электрон, у остальных – ни одного. Поскольку оба эти коридора «глубоко внизу», есть ли на них электроны, нет ли – снаружи почти не заметно. Поэтому все лантаноиды похожи друг на друга.

Примерно так же всё обстоит и у актиноидов.

4. Так же, как у хрома, электрон «убегает» с уже было достроенного s-коридора верхнего этажа в полузаполненный d-коридор предыдущего этажа у атомов меди (29), серебра (47), золота (79) и ещё восьми элементов 4–7-го рядов (найдите их!). А у палладия (46) и вовсе вниз «сбежали» оба электрона с верхнего этажа.

«Перебежки» электронов с уровней 4f на 5d и обратно в атомах лантаноидов и с уровней 5f на 6d и обратно в атомах актиноидов мы уже обсудили в задаче 3.

ПРОБИРКИ В ЦЕНТРИФУГЕ

а) Да, возможно: например, поставим три пробирки в вершины правильного треугольника, а оставшиеся четыре – в вершины квадрата.

б) Для всех N, кроме 1 и 23. Очевидно, что в первом случае центр тяжести будет смещён в сторону пробирки, а в последнем – в сторону, противоположную пустому отверстию.

Докажем, что для оставшихся значений N такая расстановка существует. Если N чётно и равно $2k$, то просто разобьём пробирки на k пар и поставим каждую пару в противоположные отверстия. Если N нечётно, то выберем из них три и поставим в вершины правильного треугольника, а оставшиеся пробирки (их чётное число) расставим парами друг напротив друга, как в предыдущем случае. Так мы сможем заполнить всю центрифугу, кроме трёх мест напротив пробирок, образующих треугольник.

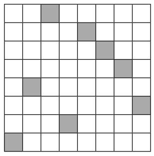
КВАКАЮЩИЕ СЛОВА

Деревянную посуду, тесто с закваской и увальня можно назвать *квашнёй*. Слова, связанные с четвертью: *кварта*, *квадрант*, *квартал* и др. *Буква* связана с деревом *бук* (возможно, потому, что древние письмена вырезали на дереве).

СЕРОВ, ПАВЕЛ I, Д'АКОСТА

Выдумана история про Серова. Он должен был написать слово «осёл» с твёрдым знаком на конце. По правилам дореволюционной орфографии, если слово кончалось на согласную, после неё должен был стоять твёрдый знак «Ъ» (раньше он назывался «ер»). Сто лет назад вследствие реформы 1917–1918 гг. это правило было отменено. А ещё в гимназиях не учили букве «ё».

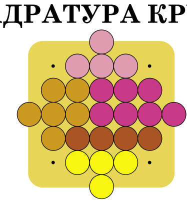
ЗАЯЧЬЕ ЗАНЯТИЕ



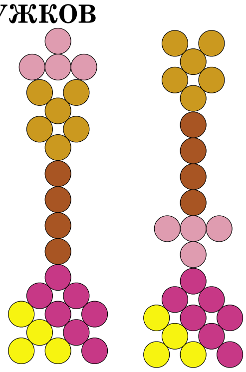
Гипотеза всё же *неверна* – есть такое расположение не бьющих друг друга восьми ладей, что среди попарных расстояний между ними нет трёх одинаковых (см. рисунок).

Но чисто по-человечески автор гипотезы *почти прав*. Ведь среди 40320 возможных расположений на доске восьми не бьющих друг друга ладей лишь у 36 нет трёх равных попарных расстояний (проверено на компьютере). Это менее 0,1% от общего количества. Найти такое расположение наугад, «методом тыка», почти нереально.

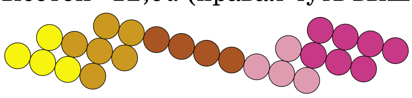
КВАДРАТУРА КРУЖКОВ



Квадрат



Башни высотой ~12,9d (правая чуть выше левой)



Фигура диаметром ~15,6d