Игорь Акулич

КЛЕТЧАТОЕ ЗАНЯТИЕ

– Что у меня в руке?

– Девятый номер «Квантика» за 2017 год!

– Верно. И сегодняшний день мы посвятим разбору статьи Андрея Карпова «Почти правильные многоугольники на клетчатой бумаге»[1]. Поэтому занятие нашего кружка с полным правом можно назвать *клетчатым*. Недавно я попросил вас прочесть статью и продумать по ней свои соображения. Сегодня будем ими делиться. Кто первый?

– Можно я?

– Конечно.

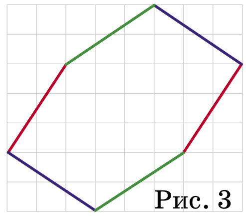


Рис. 3

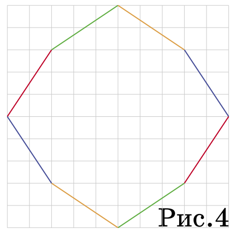


Рис.4

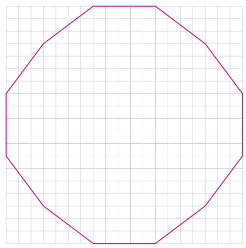


Рис. 8

– Меня смутило название. Что значит «Почти правильные»? По сути автор занимается поиском *выпуклых равносторонних* многоугольников с вершинами в узлах бесконечной квадратной сетки. И если многоугольники на рисунках 4, 8 и 10 ещё можно (чисто зрительно!) считать «почти правильными», то фигуру на рисунке 3 назвать так язык не повернётся!

– Не будем судить строго. Это лишь заголовок, да и что-то общее с правильными многоугольниками всё же есть – выпуклость и равенство сторон. И в тексте автор этот термин нигде не применяет. Поэтому претензия снимается. Ещё есть замечания?

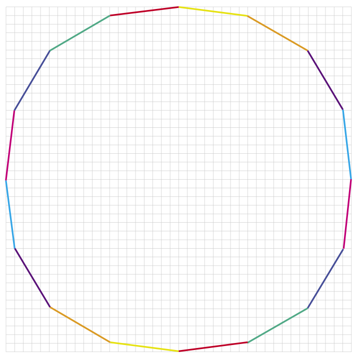
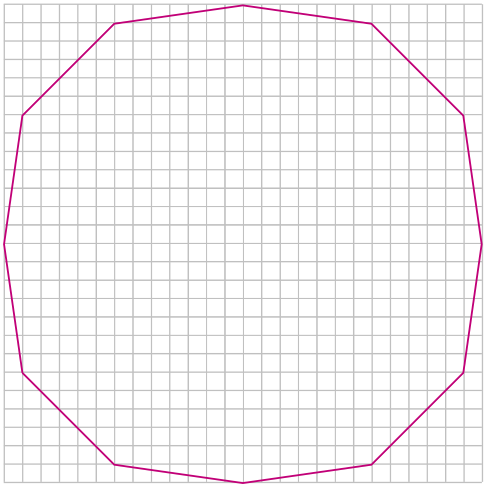


Рис. 10

– У меня есть! В статье написано: «Перебором на компьютере можно показать, что 65 – наименьшее из чисел, нетривиальным образом раскладывающееся в сумму двух квадратов двумя различными способами». Там указаны и эти разложения:

[1] Чтобы было легче понять, о чём идёт речь, рекомендуем найти журнал со статьёй и держать под рукой. Номера рисунков даны по этой статье.

$65 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$. Не знаю, как насчёт компьютера[2], но я и без него нашёл меньшее значение: $50 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$. И оно позволяет построить равносторонний 12-угольник со стороной $5\sqrt{2}$ – вот посмотрите:



Кстати, эта картинка чем-то похожа на рисунок 8 в статье, только повёрнутый на 45°.

– Да, стоило написать аккуратней: «...в сумму двух квадратов *различных* натуральных чисел...». Но и здесь автора можно понять: он ведь искал эти разложения, чтобы построить *шестнадцатиугольник* (который с числом 50 не построишь). Ещё вопросы?

– У меня есть. Автор в итоге доказал, что можно построить равносторонний выпуклый многоугольник с любым *чётным* числом сторон. А про нечётное число сторон ничего не говорит. Только в начале упоминает, что равносторонний треугольник построить нельзя. А пятиугольник? Семиугольник? Там ведь «степеней свободы» довольно много...

– Справедливо. Без такой информации статья выглядит незавершённой. Однако все точки над «i» ставит *теорема Болла*: **на бесконечной квадратной сетке невозможно расположить равносторонний (пусть даже и невыпуклый) многоугольник с нечётным числом сторон, вершины которого лежат в узлах сетки.** И что интересно, доказательство её вполне элементарно. Сейчас мы с ним ознакомимся.

[2] Отвечать на такие вопросы без компьютера поможет книга Л.А.Калужнина «Основная теорема арифметики» (М.: Наука, 1969).

Предположим противное – что всё-таки *можно* построить равносторонний n-угольник с вершинами в узлах сетки, где n – нечётное число. Из всех таких возможных многоугольников выберем тот, у которого длина стороны *наименьшая*, и дальше возиться будем с ним. Введём систему прямоугольных координат, оси которых (Ox и Oy) направлены по линиям сетки (например, Ox – вправо, Oy – вверх), а начало находится в одной из вершин многоугольника. За единицу измерения примем сторону одной клетки. Теперь, стартовав от начала координат, обойдём наш многоугольник в одном из двух возможных направлений, пока не вернёмся обратно. В этом случае каждая пройденная сторона (их, разумеется, тоже n штук) представляет собой направленный отрезок – *вектор*.

Каждый вектор описывается парой чисел, представляющих собой его проекции (со знаком) на оси координат, и эти числа суть разности между координатами конца и начала вектора. Так как начала и концы всех векторов – это вершины n-угольника, лежащие в узлах, то их координаты – целые числа, а значит, и проекции каждого вектора на оси координат – целые числа (они могут быть и отрицательными). Например, если взять последний продемонстрированный нам 12-угольник (см. выше) и начать обход с самой нижней вершины по часовой стрелке, то первый вектор определяется парой чисел (–7; 1), второй – парой (–5; 5) и т.д. Пронумеруем векторы в произвольном порядке (например, по очерёдности обхода) числами от 1 до n. Обозначим проекции n-го вектора так: $(x_n; y_n)$. Подумайте – связывает ли что-то между собой проекции различных векторов?

– Конечно, связывает! Ведь по той же теореме Пифагора квадрат длины каждой стороны равен $x_n^2+y_n^2$. И эти числа все равны между собой – многоугольник-то равносторонний!

– Верно. Тогда можно записать цепочку равенств:

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=\ldots=x_n^2+y_n^2=a,$$

где a – некоторое *натуральное* число (ибо оно является суммой квадратов двух целых чисел). А можно ли ещё как-то связать между собой эти координаты?

– Можно! Мы же обходим многоугольник «по кругу», возвратившись в исходную вершину. Поэтому суммарный сдвиг по каждой оси будет *нулевой*.

– Молодец! Отсюда получаем ещё два равенства:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0 \quad \text{и} \quad y_1+y_2+\ldots+y_n=0.$$

Прекрасно! И что дальше? Есть идеи?

< *Молчание*>

– Ладно, подскажу. Пусть a нечётно. Что тогда можно сказать о чётности x_1 и y_1?

– Одно чётно, а другое нечётно.

– Правильно, и то же верно для остальных пар: x_2 и y_2, x_3 и y_3, и т. д. А теперь сложим все иксы и игреки, получим 0. Но в этой сумме ровно n нечётных чисел (по одному из каждой пары). А так как n нечётно, то суммой не может быть *чётное* число 0.

– А если a чётно?

– Рассмотрим два случая. Первый: a не делится на 4. Что тогда можно сказать о чётности x_1 и y_1?

– Оба чётные или оба нечётные!

– Да, но они не могут быть оба чётными.

– Почему?

– Тогда их квадраты делятся на 4 и сумма тоже, противоречие с предположением нашего случая. Получается, что все иксы нечётные. Значит, их сумма не может равняться 0, ведь их количество n нечётно!

– А что делать в случае, когда a делится на 4?

– Тогда оба числа x_1 и y_1 должны быть чётными. Иначе $x_1=2p+1$ и $y_1=2q+1$ (где p и q – целые). Сумма их квадратов равна $x_1^2+y_1^2=4p^2+4p+1+4q^2+4q+1=$ $=4(p^2+p+q^2+q)+2$, что не делится на 4.

– И что дальше?

– Аналогичными рассуждениями получаем, что x_2 и y_2 – тоже чётные, а также x_3 и y_3 – чётные, и так далее вплоть до x_n и y_n. Итак, проекции *всех* сторон-векторов на обе координатные оси есть *чётные числа*. Следовательно, мы можем уменьшить наш n-угольник *вдвое*, и его вершины при этом попадут в узлы сетки, а длина стороны уменьшится в 2 раза! Но наш многоугольник *уже наименьший возможный*, и сделать его ещё меньше нельзя! Противоречие.

– Здорово получилось!

– Что же, поздравляю с отличным результатом – теорема Болла доказана. До следующей встречи!

Художник Алексей Вайнер