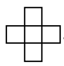
LXXXV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Материал подготовил Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс, приглашаются все желающие. Первый (письменный) тур очередной олимпиады прошёл 17 ноября 2018 года. Мы приводим несколько задач этого тура для 6, 7 и 8 классов, попробуйте с ними справиться. В 6 и 7 классах предлагалось по 4 задачи, а в 8 классе – 5, на решение отводилось 3 часа.

Избранные задачи I тура

1 (7 класс). Таблица 70×70 заполнена числами от 1 до 4900: в первой строке слева направо выписаны числа от 1 до 70 в порядке возрастания; во второй строке точно так же выписаны числа от 71 до 140 и т.д.; в последней строке слева направо выписаны числа от 4831 до 4900. Можно ли в этой таблице найти крест из 5 клеточек вида , сумма чисел в котором равна 2018?

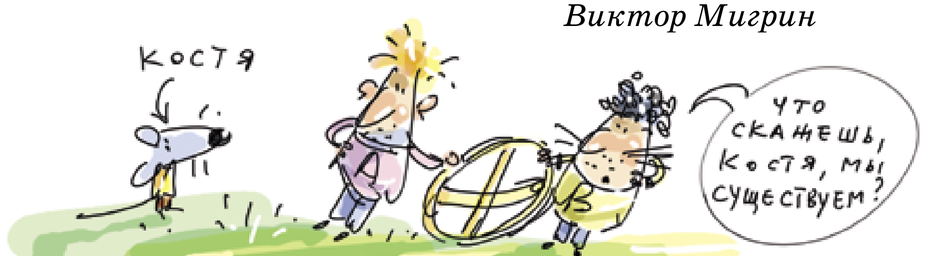
Андрей Солынин

2 (6 класс). Костю в детстве неправильно научили складывать натуральные числа: он полагает, что после привычного всем сложения следует переставить цифры суммы в убывающем порядке. Обозначим сложение по Костиному правилу знаком $\oplus$ (например, $99 \oplus 2 = 110$). Существуют ли такие натуральные числа a и b, для которых $a \oplus b = a$?

Константин Кохась

3 (6 класс). За большим круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжёт. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько всего лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Виктор Мигрин



4 (6 класс). Учительница считает некоторых учеников 6«А» класса отличниками, а остальных – двоечниками. В течение четверти в классе прошло 6 контрольных по математике (на них ставились оценки от 2 до 5). На каждой контрольной присутствовали все ученики, и на каждой контрольной они рассаживались по двое за парту (возможно, на разных контрольных по-разному). Двоечник чудесным образом получал тройку, если сидел за одной партой с отличником, и двойку, если сидел с другим двоечником. Всего за эти контрольные пятёрок было получено в 3 раза больше, чем четвёрок, а троек – на 10 меньше, чем двоек. Докажите, что найдётся отличник, получивший хотя бы одну оценку не выше тройки.

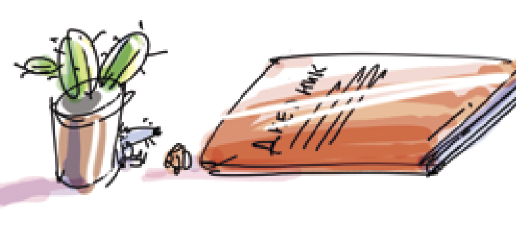
Александр Кузнецов

5 (8 класс). У Оли есть прямоугольная шоколадка с целыми сторонами, разбитая на единичные квадратики. Площадь шоколадки делится на 1000. Докажите, что Оля может съесть несколько квадратиков так, чтобы оставшаяся часть шоколадки оказалась прямоугольником, а площадь съеденной части составляла бы ровно 73% от исходной.

Ольга Иванова

6 (8 класс). Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10. Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из самой нижней клетки любого столбца перелететь в самую верхнюю клетку того же столбца, а из самой правой клетки любой строки перелететь в самую левую клетку той же строки. Докажите, что кузнечику понадобится хотя бы 9 перелётов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.

Надежда Власова



Художник Сергей Чуб