НАШ КОНКУРС (Квантик № 1, 2019)

21. *Из спичек сложен равносторонний треугольник со стороной 2 (рис. 1). Два игрока по очереди убирают по одной спичке. Проигрывает игрок, после хода которого не останется ни одного треугольника, составленного из трёх спичек. Кто может обеспечить себе победу – начинающий или его противник – и как ему играть?*

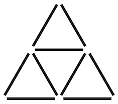


Рис. 1

Ответ: выигрывает второй игрок. Для этого своим первым ходом пусть он возьмёт спичку, параллельную той спичке, которую взял первый игрок, но не лежащую с ней на одной прямой. Например, если первый игрок взял одну из красных спичек (рисунок 2), то второй игрок возьмёт синюю спичку, а если первый игрок взял синюю спичку, то второй игрок возьмёт любую из красных спичек.

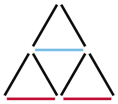


Рис. 2

Легко видеть, что после двух ходов (один ход первого игрока и один ход второго) останется только один треугольник, составленный из трёх спичек (скажем, зелёный треугольник на рисунке 3). При последующих ходах, чтобы не разрушить зелёный треугольник и не проиграть, игроки будут вынуждены брать спички, не входящие в этот треугольник. Таких спичек четыре, так что первым взять одну из зелёных спичек (и проиграть) придётся первому игроку.

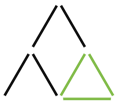


Рис. 3

22. *Придумайте какое-нибудь число, квадрат которого состоит только из цифр 1, 2, 3 и все эти цифры присутствуют.*

Ответ: например, $12321 = 111^2$.

23. *Сад в форме квадрата 6×6 окружён невысоким забором. Садовник хочет посадить в саду яблони (не более одной в каждой клетке квадрата) так, чтобы ни одна яблоня не была в тени. Яблоня находится в тени, если с четырёх сторон от неё (в четырёх соседних по стороне клетках сада) растёт по яблоне. Какое наибольшее число яблонь может посадить садовник? Приведите пример и докажите, что больше яблонь посадить нельзя.*

Ответ: наибольшее число яблонь равно 32.

На рисунке 4, показано, что садовник может посадить в саду 32 яблони так, что ни одна из яблонь не будет в тени (то есть ни одна из яблонь не будет с четырёх сторон окружена другими яблонями).

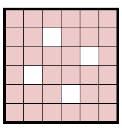


Рис. 4

Более 32 яблонь садовник не может посадить по следующей причине: в каждом из четырёх изображённых на рисунке 5 квадратов 3×3 обязательно должна быть хотя бы одна клетка без яблони, поскольку в противном случае яблоня, находящаяся в центральной клетке квадрата 3×3, заведомо будет находиться в тени.

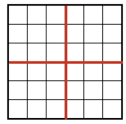


Рис. 5

24. *Петя и Вася купили по конструктору «Собери тетраэдр». В конструкторе 4 треугольника – будущие грани тетраэдра. По дороге Петя потерял один треугольник. Заметив это дома, он побежал с остатками своего конструктора к Васе. Сравнивая детали, они обнаружили, что среди четырёх Васиных треугольников есть три таких же, как у Пети. «Отлично, теперь я знаю, какой треугольник я потерял!» – воскликнул Петя. «Вот только почему цены конструкторов отличаются?» – задумался он. А могло ли быть так, что у ребят конструкторы отличались одним треугольником, но из каждого можно было собрать свой тетраэдр?*

Ответ: так могло быть. Приведём пример. Пусть в конструкторе Пети четыре равнобедренных треугольника с рёбрами по 2 см и основанием 1 см, а у Васи – три таких же треугольника, а четвёртый – равносторонний треугольник со стороной 1 см. Тогда Петя сможет собрать тетраэдр как на рисунке 6, а Вася – как на рисунке 7.

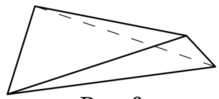


Рис. 6

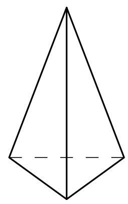


Рис. 7

25. *Найдутся ли 100 различных натуральных чисел, никакие два из которых не имеют общих множителей, больших 1, но среднее арифметическое любых нескольких из них – целое?*

Ответ: да, найдутся. Например, подходят числа $1 \cdot 100! + 1$, $2 \cdot 100! + 1$, $3 \cdot 100! + 1$, ..., $100 \cdot 100! + 1$ (где $100!$ – это $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$). Сумма любых k из них (где k от 1 до 100) будет делиться на k, поскольку имеет вид $N \cdot 100! + k$, а $100!$ делится на k, так как делится на все числа от 1 до 100. Это и значит, что среднее арифметическое любых нескольких чисел из нашего примера – целое.

Покажем ещё, что в приведённом примере нет чисел с общим множителем, большим 1.

Предположим противное: какие-то два числа из примера – скажем, $a\cdot 100!+1$ и $b\cdot 100!+$ $+1$, – делятся на простое число p. Тогда $p>100$ (иначе на p делилось бы и число 100!, и, следовательно, число 1, что невозможно). Разность наших двух чисел $(a-b)\cdot 100!$ тоже делится на p, но у этой разности, очевидно, нет простых делителей, больших 100. Противоречие.

ПРИВЕТ ОТ «ПИОНЕРА»! (Квантик № 1, 2019)

Сначала для порядка решим исходную задачу Н. Разговорова.

И в первый, и во второй день Мюнхгаузен в заказ включил «мач». И в оба этих дня получил единственное общее блюдо – рисовый суп. Значит, «мач» – это рисовый суп, ну, а «кули» (который он тоже заказал в первый день) – пирожное.

Аналогично, сравнивая питание на второй и третий день, определяем, что «ахи» – бифштекс, а «пуро» – печёные яблоки.

Снова вернувшись во второй день, методом исключения выясняем, что «амали» – компот.

Всё! И потому на четвёртый день барон уже достоверно знал, что заказанные им «мач», «ахи» и «кули» – это рисовый суп, бифштекс и пирожное соответственно.

Как видно, с пятью блюдами Мюнхгаузен справился. Но вряд ли это максимум. Каков же он? Оказывается, наибольшее возможное число – 7. Покажем, как этого можно добиться. Чтобы не ломать язык мудрёными словечками, предварительно присвоим названиям блюд просто номера от 1 до 7. А далее пусть барон действует так:

– блюдо № 1 он закажет только в 1-й день, № 2 – только во второй, № 3 – только в третий;
– блюдо № 4 он закажет в первый и во второй день, № 5 – в первый и в третий, № 6 – во второй и в третий;
– блюдо № 7 он закажет во все три дня.

Дальнейшее ясно. Определив, сколько раз подавалось каждое из семи блюд и в какие именно дни, барон без труда сможет сопоставить их с названиями.

Убедимся, что больше семи блюд распознать нельзя. Сопоставим каждому блюду код: тройку чисел 0 и 1, где 0 значит, что в соответствующий день блюдо не было подано, а 1 – что было. Например, если блюдо было подано в первый и третий дни, то соответствующий код – 101.

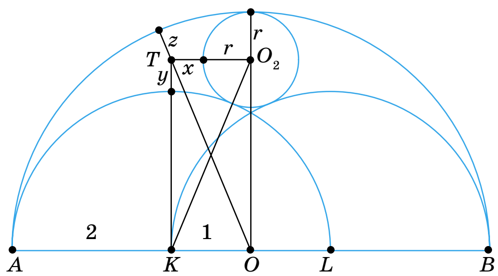
В каком случае Мюнхгаузен может распознать блюдо? Во-первых, ему необходимо хотя бы раз его заказать, то есть код блюда содержит единицу. Во-вторых, набор дней, в которые он заказывал данное блюдо, не должен совпадать с набором дней никакого другого блюда, то есть у разных блюд коды разные.

Всего может быть 7 различных кодов: 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 (код 000 мы отбросили, так как там нет 1). Значит, всего Мюнхгаузен мог распознать не более 7 блюд.

Аналогично можно дать ответ о максимальном количестве распознаваемых блюд, если в распоряжении барона не 3, а n дней. Оно равно 2^n-1. В случае с бароном $n=3$, и $2^3-1=7$.

ОКРУЖНОСТИ В ОКНЕ (Квантик № 2, 2019)

Пусть K, O и L – центры полуокружностей (см. рисунок ниже). Заметим, что диаметр AB большой полуокружности состоит из трёх радиусов малых полуокружностей (AK, KL и LB). Приняв радиус малой полуокружности за 2, получим тогда, что $AB=3$.



Пусть центральная синяя окружность (с центром O_2), касающаяся всех полуокружностей, имеет радиус r. Из симметрии картинки, отрезок O_2O перпендикулярен AB. По трём точкам O_2, O и K построим прямоугольник O_2OKT и докажем, что его четвёртая вершина T – искомый центр O_1 окружности, которая касается большой и левой малой полуокружностей и центральной синей окружности.

Обозначим расстояния от точки T: до центральной синей окружности – через x, до левой малой полуокружности – через y, до большой полуокружности – через z. (Напомним, что расстояние от точки T до окружности – это расстояние от T до ближайшей к ней точки окружности, а такая точка находится на прямой, соединяющей T с центром окружности.)

Запишем равенство верхней и нижней сторон прямоугольника: $x+r=3-2$, равенство его левой и правой сторон: $2+y=3-r$, и равенство его диагоналей: $3-z=2+r$. Из этих равенств получаем, что $x=y=z=1-r$, то есть T – действительно центр искомой окружности. Аналогично находится центр O_3.

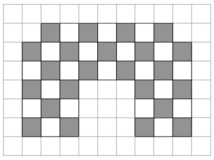
Итак, центры O_1, O_2, O_3 всех трёх синих окружностей лежат на одной прямой, параллельной AB.

ДВЕ ВЕРЁВКИ

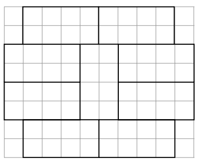
Пусть сначала Квантик поможет Ноутику крепко схватиться за правую верёвку. Потом Квантик раскачивает эту верёвку, берёт в руку конец левой верёвки, а второй рукой ловит раскачивающуюся верёвку. Ноутик спрыгивает, а Квантик завязывает узел. Если есть опасность, что Ноутик сорвётся и ударится, лучше для раскачивания прицепить к левой верёвке огнетушитель (он виден в углу сцены).

ЗАМКИ

1. Ответ: нет, не могут. Раскрасим схему залов в шахматном порядке, как показано на рисунке справа. Предположим, что требуемый обход возможен. Заметим, что «чёрные» и «белые» залы при таком обходе чередуются. Это означает, что количество чёрных и белых залов должно отличаться не более чем на 1. Но на схеме чёрных залов на 3 больше, чем белых. Получаем противоречие.



2. Ответ: да, может. Пример показан на рисунке справа. Любой из 8 залов граничит с центральным залом по участку, в котором может быть устроен проход в центральный зал.



3. Старые замки строили для обороны от врагов. В случае, если враги прорвались в замок и поднимаются по лестнице, правильная конструкция лестницы позволяла воину-правше (а таких большинство) держать оборону и наносить удары, орудуя мечом, при этом скрываясь за лестничной колонной. (См. также статью Сергея Дворянинова «Винтовая линия» в «Квантике» №3 за 2014 год.)

4. Ответ: да. Покажем, как это можно сделать. Узник зажигает лампу в той комнате, где он находится. Назовём эту комнату «исходной». Затем он проходит в соседние комнаты до тех пор, пока не окажется в комнате, где горит лампа. Пусть это комната k-я по счёту на его пути (не считая исходной). Он гасит лампу, возвращается назад тем же маршрутом (отсчитывая k комнат) и смотрит, горит ли лампа в исходной комнате. Если не горит, то он сделал полный круг и общее число комнат в замке равно k. Если же лампа горит, то узник повторяет своё действие, продвигаясь всё дальше по кругу до следующей горящей лампы. В конце концов он сделает полный круг и поймёт это, вернувшись в исходную комнату и обнаружив, что лампа погашена!

ОГОРОДНОЕ ЗАНЯТИЕ

Всё та же «схема Произволова» решает задачу легко и просто. Пусть число капустных грядок равно k, а морковных – m. Тогда, с одной стороны, число пар равно $2k$, а с другой – m. Значит, $2k=m$, и суммарное число грядок равно $k+m=k+2k=3k$, то есть должно делиться на 3. Но 64 на 3 не делится! Поэтому распланировать грядки указанным образом невозможно.