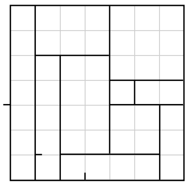
НАШ КОНКУРС, VII ТУР

(«Квантик» № 3, 2019)

31. *По окружности расставили числа 1, 2, 3, … , 100 так, что любые два соседних числа отличаются не более чем на 2. Могут ли при этом числа 50 и 51 не быть соседями друг друга?*

Ответ: могут. Расставим числа так: 2, 4, 6, …, 100, 99, 97, 95, …, 1 (сначала все чётные числа в порядке возрастания, а потом нечётные в порядке убывания). На самом деле такая расстановка единственна (с точностью до поворота и направления обхода).

32. *Клетчатый квадрат 7×7 разрезали по линиям сетки на различные прямоугольники. Какое наибольшее число прямоугольников могло получиться?*



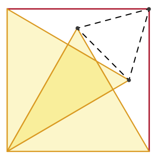
Ответ: 10 (см. пример на рисунке). Больше нельзя, потому что сумма площадей 11 прямоугольников с наименьшими площадями равна $1\times 1+1\times 2+1\times 3+1\times 4+2\times 2+1\times 5+1\times 6+2\times 3+1\times 7+1\times 8+2\times 4=54>49=7\times 7$.

33. *Каждый из кандидатов в мэры либо лжец (всегда лжёт), либо правдолюб (всегда говорит правду), и все кандидаты знают, кто есть кто. В начале дебатов каждый из 25 кандидатов заявил: «Среди остальных присутствующих кандидатов лжецов больше, чем правдолюбов». После того как подошёл опоздавший 26-й кандидат, каждый из кандидатов повторил своё заявление. Кем является опоздавший: лжецом или правдолюбом?*

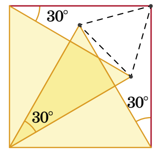
Ответ: правдолюбом. Если до прихода опоздавшего кандидата было меньше 12 правдолюбов, то все остальные – лжецы, сказавшие правду, что невозможно. Если же было меньше 13 лжецов, то остальные – солгавшие правдолюбы, что также невозможно. Значит, изначально было 12 правдолюбов и 13 лжецов.

Аналогично, после прихода опоздавшего стало 13 правдолюбов и 13 лжецов. Значит, опоздавший – правдолюб.

34. *Два жёлтых равносторонних треугольника расположены в квадрате, как показано на рисунке. Докажите, что три выделенные точки образуют равносторонний треугольник.*



Найдите на картинке три равных равнобедренных треугольника с углом 30° при вершине и боковыми сторонами (оранжевыми), равными стороне квадрата. Их основания (штриховые линии) – это стороны равностороннего треугольника.



35. *По кругу выкладывают 30 одинаковых на вид таблеток, из них 20 хороших и 10 плохих. Два мудреца по очереди берут по одной таблетке. Первый мудрец будет знать, где лежат плохие таблетки, а второй – нет, но они хотят до выкладывания таблеток договориться, как после каждого хода первого второй найдёт хорошую таблетку. После 20 ходов на столе должны остаться 10 плохих таблеток. Предложите алгоритм действий для мудрецов. (Беря таблетки, мудрецы не общаются и не подают никаких знаков. Каждый видит, какую таблетку взял партнёр.)*

Будем обходить таблетки по часовой стрелке, тогда обязательно найдутся две хорошие таблетки рядом, сразу за которыми лежит плохая. Первый мудрец берёт первую таблетку, второй – вторую, а третья (плохая) запоминается и мысленно выбрасывается. После чего задача сводится к такой же с меньшим числом таблеток, причём отношение хороших таблеток к плохим неизменно – 2 к 1, и алгоритм повторяется.

ПАРАДОКС ДНЕЙ РОЖДЕНИЯ

1. Ответ: 5. Подсчитаем вероятность того, что у всех разные знаки зодиака. Для группы из одного человека она равна 1, из двух – $1\cdot\frac{11}{12}=\frac{11}{12}$, из трёх – $\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{55}{72}$, из четырёх – $\frac{55}{72}\cdot\frac{9}{12}=\frac{55}{96}$, из пяти – $\frac{55}{96}\cdot\frac{8}{12}=\frac{55}{144}$, что меньше 0,5.

2. Ответ: $\approx 2\%$.Если учитывать високосные годы, то вероятность родиться 29 февраля – примерно $\frac{1}{4}:365\frac{1}{4}=\frac{1}{1461}$. Тогда вероятность, что из остальных 29 человек никто не родился 29 февраля, будет $\left(\frac{1460}{1461}\right)^{29}\approx 0{,}98$.

3. Ответ: 61 человек. Вероятность, что у данного человека уникальный день рождения, будет $\left(\frac{364}{365}\right)^{74}\approx 0{,}82$. Итого $75\cdot 0{,}82\approx 61$ человек.

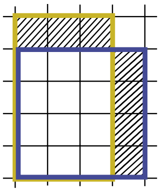
ОГОРОД ПОТАПЫЧА

1. Ответ: А, В.

2. Ответ: прямоугольник 3×4.

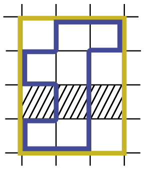
3. Ответ: могло. Например, у Потапыча огород – прямоугольник 3×5, а у Усатыча – 1×15.

4. Ответ: площадь больше у квадратного. Пусть у прямоугольного участка длины сторон различаются хотя бы на 2. Тогда мы можем длинную сторону уменьшить на 1, а короткую увеличить на 1 (см. рисунок). Периметр не изменится, а площадь увеличится на новую длинную сторону и уменьшится на старую короткую – то есть возрастёт хотя бы на 1. Поскольку из данного забора можно составить квадрат, его периметр делится на 4, и у прямоугольного участка разность сторон чётна – хотя бы 2.



5. Ответ: Усатыч мог быть прав – например, если у него есть участки 4×4 и 1×15.

6. Ответ: 16 квадратных метров. Через самую правую и левую вертикальные стороны участка, а также через самую верхнюю и нижнюю горизонтальные стороны участка проведём по прямой – получится прямоугольник, содержащий участок (как на рисунке).



При этом периметр прямоугольника не будет превышать периметр участка. Действительно, каждая горизонталь (полоска в 1 клетку) прямоугольника пересекает участок и тем самым содержит хотя бы два вертикальных одноклеточных куска границы. Аналогично каждая вертикаль содержит хотя бы два горизонтальных одноклеточных куска границы. При этом для прямоугольника на каждую горизонталь и вертикаль приходится ровно по два куска границы.

Итак, можем считать участок прямоугольным, причём максимальная площадь будет у квадрата 4×4, см. задачу 4.

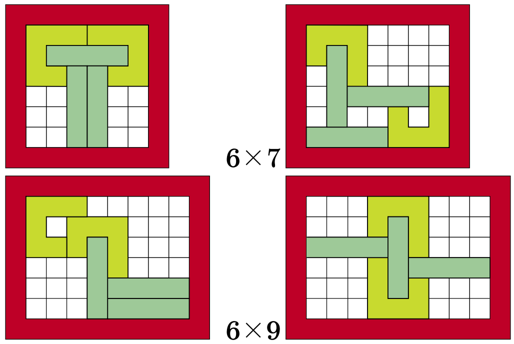
7. Ответ: 56. Как мы выяснили в задаче 6, участок максимальной площади можно взять прямоугольным. А в задаче 4 мы выяснили, что разность сторон должна быть меньше 2. Поскольку 30 не делится на 4, квадрат мы получить не можем. Значит, это прямоугольник 7×8 – у него разность сторон равна 1.

8. Ответ: не смогут. Сумма длин заборов Усатыча и Потапыча равна 46. Рассуждая, как в решении задач 6 и 7, докажите самостоятельно, что площадь их участка меньше площади квадрата 12×12.

9. Ответ: нет, так как площадь участка равна 106, что меньше, чем 144.

10. Ответ: да, они огородят квадрат 12×12.

АНТИСЛАЙД В РАМКЕ

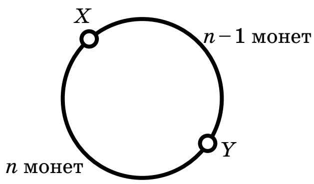


XL ТУРНИР ГОРОДОВ, ВЕСЕННИЙ ТУР, 8–9 классы

Базовый вариант

1. Ответ: могло. Пример с 11 числами: 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1. Докажите, что больше 11 чисел не могло быть выписано.

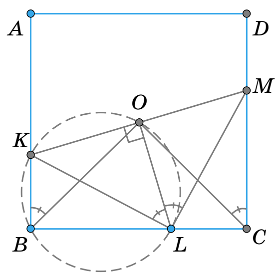
2. Пусть $(n-1)$-я перевёрнутая монета – X, а n-я – Y. Тогда между X и Y по часовой стрелке лежит $n-1$ монет, а раз всего монет в круге $2n+1$, то между Y и X по часовой стрелке лежит n монет (см. рисунок). Это значит, что $(n+1)$-й мы снова перевернём монету X.



И далее будем переворачивать уже переворачивавшиеся монеты, но в обратном порядке: ведь пропустить по часовой стрелке $n+1$ монет – всё равно, что пропустить против часовой $n-2$ монет, ..., пропустить по часовой стрелке $2n-2$ монет – всё равно, что пропустить против часовой 1 монету. А последние два раза перевернём одну и ту же монету. В итоге решкой вверх будет лежать только Y – её переворачивали нечётное число раз, а остальные монеты – чётное.

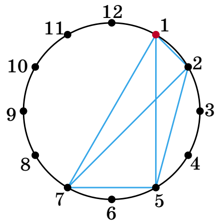
3. Так как $n^2 = n(m+n)-mn$, из условия следует, что n^2 делится на $m+n$. Значит, $n^2 \geqslant m+n$.

4. Пусть KLM – один из таких треугольников, O – середина его основания KM (см. рисунок). Тогда LO – медиана, а значит, и биссектриса, и высота треугольника KLM. Поскольку углы KBL и LOK прямые, точки B и O лежат на окружности



с диаметром KL, откуда $\angle KBO = \angle KLO = \alpha/2$. Аналогично, $\angle MCO = \alpha/2$. Тогда O – точка пересечения прямых, проведённых из вершин B и C под углом $\alpha/2$ к сторонам прямоугольника BA и CD соответственно, то есть она не зависит от положения треугольника KLM.

5. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 12 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать «шаблон» – четырёхугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.



Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он «накрыл» обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

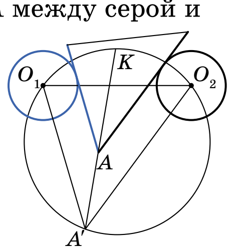
Решите ту же задачу для 13 шкатулок.

Сложный вариант

1. Ответ: могут. Если первый назвал число 22, то второй может однозначно определить все числа, так как сумму 100 при этом можно получить лишь одним способом — взяв наименьшие возможные числа: 1, 2, 3, 22, 23, 24 и 25.

2. Назовём самого левого кузнечика Ричардом. Пусть тогда сначала все кузнечики, кроме Ричарда, перепрыгнут через Ричарда. Ясно, что теперь кузнечики находятся в положении, которое симметрично изначальному. Тогда они могут, используя ходы, симметричные тем, которые они бы делали при прыжках вправо, добиться требуемого.

3. Точки биссектрисы угла A между серой и чёрной сторонами деревянного треугольника равноудалены от этих сторон (серый цвет изображаем синим). Проведём через центры O_1 и O_2 серого и чёрного кругов прямые, параллельные этим сторонам.



Пусть они пересекаются в точке A'. Поскольку угол $O_1A'O_2$, равный углу A, постоянен, описанная окружность Ω треугольника $O_1A'O_2$ не зависит от положения деревянного треугольника.

Прямая l, содержащая биссектрису угла $O_1A'O_2$, проходит тогда через фиксированную точку K – середину дуги O_1O_2окружности Ω.

С другой стороны, точки прямой l равноудалены от прямых O_1A' и O_2A', а серая и чёрная стороны «отодвинуты» соответственно от O_1A' и O_2A' на одно и то же расстояние в сторону точки K (так как радиусы серого и чёрного кругов равны), откуда прямая l содержит и биссектрису угла A деревянного треугольника.

4. Ответ: $\frac{1}{2}$. Пусть в вершинах по кругу расставлены числа $x_1, \ldots, x_{100}$, и пусть k – сумма «красных» чисел, а s – «синих». Тогда сумма красных чисел равна сумме всех одночленов вида x_ix_j, где i и j разной чётности и $i<j$, а сумма синих равна сумме всех одночленов вида x_ix_j, где i и j одной чётности и $i<j$; кроме того $x_1^2+x_2^2+\ldots+ x_{100}^2=1$. Заметим теперь, что выражение $(x_1-x_2+x_3-x_4+\ldots+x_{99}-x_{100})^2$ равно $1-2k+2s$ и неотрицательно, откуда $k-s \leqslant \frac{1}{2}$. Равенство достигается, когда выражение в скобках равно нулю, например, при $x_1=x_2=\ldots=x_{100}=\frac{1}{10}$.

5. Ответ. При всех чётных n.

Пронумеруем столбцы и строки от 1 до n соответственно слева направо и сверху вниз, а также раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы угловая клетка в первом столбце и первой строке была чёрной.

Пусть n – чётное. Заполним таблицу числами от 1 до n^2 так: ставим их друг за другом, начиная от 1, сначала в первой строке слева направо, а потом – вдоль столбцов: вниз по последнему столбцу, вверх по предпоследнему, и т. д. В итоге число n^2 окажется прямо под 1, см. пример для $n=6$ на левом рисунке.

1	2	3	4	5	6
36	27	26	17	16	7
35	28	25	18	15	8
34	29	24	19	14	9
33	30	23	20	13	10
32	31	22	21	12	11

1	2	3	4	5	0
0	3	2	5	4	1
5	4	1	0	3	2
4	5	0	1	2	3
3	0	5	2	1	4
2	1	4	3	0	5

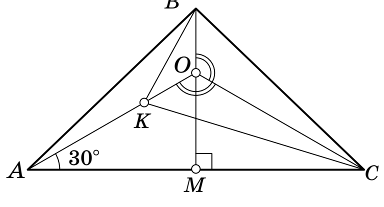
Заменим теперь числа на их остатки по модулю n: 0, 1, ..., $n-1$ (см. правый рисунок). Докажите самостоятельно, что они расставлены следующим образом: для нечётного столбца последнее (нижнее) число совпадает с первым числом следующего чётного столбца и вторым числом следующего нечётного.

Значит, каждый столбец начинается с остатка i, равного своему номеру, кроме n-го, который начинается с нуля, причём в чётных столбцах остатки идут по возрастанию с i до $n-1$, а потом с нуля до $i-1$, а в нечётных – по убыванию с i до 0, а потом с $n-1$ до $i+1$.

Докажем, что в каждом столбце все остатки различны. Пусть в какой-то строке совпали два остатка. Они не могут находиться в столбцах одной чётности – такие столбцы получаются друг из друга циклическим сдвигом. Значит, один остаток находится в чётном столбце, а второй – в нечётном. Но тогда эти два остатка стоят на клетках разного цвета и не могут совпадать, противоречие.

Пусть нам удалось расставить числа требуемым образом для нечётного n. Тогда для каждой белой клетки сумма номеров строки и столбца, в которых она находится, нечётна, а для чёрной – чётна. Если же мы возьмём такие суммы по всем числам с одинаковым остатком по модулю n, то учтём каждый столбец и каждую строку ровно один раз и в сумме получим $2 \cdot n(n+1)/2$, то есть чётное число. Значит, среди чисел с одинаковым остатком чётное количество находится на белых клетках. Но для каждого числа с остатком 1 следующее за ним число имеет остаток 2 и стоит на клетке противоположного цвета. Значит, на чёрных клетках стоит чётное количество чисел с остатком 2 и всего чисел с остатком 2 чётно, противоречие.

6. Ответ. 150°. Пусть высота BM треугольника ABC пересекается с прямой AK в точке O (см. рисунок). Тогда $\angle COM = \angle AOM = 60°$. Значит, $\angle AOC = 120°$ и $\angle COB = 120°$. Следовательно, треугольники BOC и KOC равны по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них (так называемый четвёртый признак равенства треугольников). Поэтому $OB = OK$, то есть треугольник BOK равнобедренный с углом 120° при вершине O. Поэтому $\angle OKB = 30°$, а $\angle AKB = 150°$.



7. Ответ. 3920000.

Оценка. Будем считать, что камни в кучках лежат один на другом, причём из выбранных кучек Петя берёт верхние (на данный момент) камни. Пронумеруем камни в каждой кучке снизу вверх числами от 1 до 400. Тогда число очков, которое Петя получает на каждом ходу, равно разности номеров удаляемых камней. В результате он получит сумму вида $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \ldots + |a_{39999} - a_{40000}|$, где a_i – номера соответствующих камней.

Заметим, что после раскрытия скобок получается алгебраическая сумма S ста чисел 400, ста чисел 399, ..., ста двоек и ста единиц, причём ровно перед половиной этих чисел стоит знак минус.

Назовём числа от 1 до 200 *маленькими*, а остальные – *большими*. Если бы разрешалось брать из кучек произвольные камни, то максимальное значение S, очевидно, достигается, когда все большие числа входят в неё со знаком плюс, а все маленькие – со знаком минус. Такая сумма равна $100(400+399+\ldots+201-200-199-\ldots-1) = 100((400-200)+(399-199)+\ldots+(201-1)) = 100 \cdot 200^2$.

Заметим, однако, что каждое большое число хотя бы один раз войдёт в сумму со знаком минус: это произойдёт, например, в тот момент, когда Петя *в первый раз* удалит камень с этим номером. Аналогично каждое из 200 маленьких чисел хотя бы один раз войдёт в сумму со знаком плюс (в тот момент, когда Петя удалит *последний* камень с этим номером). Поэтому максимальный результат Пети не превышает $99(400+399+\ldots+201) - 99(200+199+\ldots+1) - (400+399+\ldots+201) + (200-199-\ldots-1) = 98 \cdot 200^2 = 3920000$.

Пример. Добиться указанного результата можно, например, так. За первые 200 ходов Петя забирает по 200 камней из первых двух кучек (при этом 200 больших чисел – каждое по разу – получают знак минус). За следующие 200 ходов он снимает 200 верхних камней из третьей кучки и 200 нижних из первой кучки, далее по 200 камней из второй и четвёртой, третьей и шестой, ..., 98-й и 100-й кучек (при этом все числа входят с «правильными» знаками). Наконец остаётся по 200 нижних камней в последних двух кучках, которые и снимаются за последние 200 ходов (и возникает 100 знаков плюс перед числами с 200 по 1).