Амелия Алаева

ПАРАДОКС ДНЕЙ РОЖДЕНИЯ

Маша попросила своего старшего друга, профессора Ивана Петровича, выступить перед её одноклассниками с интересной темой. И вот, в раннее утро понедельника, Иван Петрович зашёл в класс. Дети, увидев профессора, разочарованно вздохнули, и лишь одна Маша радостно помахала ему рукой.

– Да, вижу, вы сегодня мало каши ели... – огорчённо сказал профессор.

– Нет, мы просто вас по телевизору видели, – сказал один из ребят. – Вы там про какие-то ужасно скучные математические формулы говорили...

– Далеко не вся математика состоит из скучных формул. Сегодня мы рассмотрим парадокс дней рождения! Какова, например, вероятность того, что из 30 человек двое родились в один день?

– Так, всего человек 30, значит, вероятность – 30/365, – начала быстро подсчитывать Маша.

– А 30/365 – это примерно 0,08, или 8%, – подсказал другой ученик, который уже успел достать калькулятор.

– Нет, Маша, ты считаешь, какую часть количество людей составляет от числа дней в году. И если людей больше 366, то вероятность у тебя больше 1 получится.

– Да... Наверное, можно немного подправить формулу?

– А вот и нет, – загадочно улыбнулся профессор. – Шанс того, что хотя бы двое из этих 30 родились в один день, превышает 50%.

– Но как? – закричали дети. Теперь уже проснулись даже сидящие за последней партой.

– Вероятность того, что у двух людей совпадут дни рождения, равна 1/365. Всего из 30 людей можно составить $30 \cdot 29/2 = 435$ пар.

– Но правильно ли подсчитывать пары? – возразила Маша.

– Хороший вопрос! Конечно, вероятность не может равняться 435/365, ведь это больше единицы. Мы не можем сложить вероятности совпадения дней рождения в каждой паре, потому что дни рождения могут совпадать сразу в нескольких парах. Но теперь вероятность более 50% уже не кажется такой большой.

– Но как всё-таки подсчитать вероятность правильно?

– Рассчитаем сначала вероятность того, что дни рождения всех людей будут различными. Возьмём наугад одного человека из группы и запомним его день рождения. Затем возьмём наугад второго человека: вероятность того, что у него день рождения не совпадёт с днём рождения первого человека, равна $1-\frac{1}{365}$. Затем возьмём третьего человека: вероятность того, что его день рождения не совпадёт с днями рождения первых двух (при условии, что дни рождения первых двух не совпали), равна $1-\frac{2}{365}$. По аналогии, для последнего человека вероятность несовпадения его дня рождения со всеми предыдущими будет равна $1-\frac{29}{365}$. Перемножая все эти вероятности, получаем вероятность того, что все дни рождения в группе различны. А вероятность того, что какие-то дни рождения совпадут, равна тогда

$$1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{29}{365}\right)\approx 0{,}71.$$

– А как вы думаете, где этот парадокс можно применить?

Дети громко начали обсуждать разные варианты. Никого из них толком не было ни слышно, ни понятно.

– Вот прекрасный пример, – отметил профессор.

– Но ничего ведь нельзя было разобрать из-за шума! – удивились некоторые.

– В этом-то и есть пример, – загадочно сказал профессор. – Вы знаете, что такое RFID-метки*?

Все отрицательно покачали головами.

– Это небольшие устройства, которые по радиочастоте передают своё «имя», то есть заложенную в них информацию. Например, они могут быть прикреплены к каждой коробке внутри грузовика. Когда грузовик заезжает на склад, специальное устройство чтения прямо при въезде считывает, какие товары

*RFID – Radio Frequency IDentification (англ.), радиочастотная идентификация.

Художник Алексей Вайнер

привезли. Ридер посылает сигнал, но некоторые метки могут ответить одновременно, как только что делали вы. Сигналы таких ответов накладываются друг на друга, и ничего нельзя разобрать.

Как решить эту проблему? Для этого есть разные алгоритмы. Некоторые основаны на том, что временной промежуток чтения меток разбивается на небольшие интервалы (слоты), а метки случайно выбирают интервал для передачи своего имени. Чем больше слотов, тем дольше будут считываться метки. Чем меньше слотов, тем выше вероятность наложения ответов и тем меньше меток будет успешно прочитано. Поэтому нужно поточнее прикинуть количество меток. Его можно оценить, исходя из общего количества слотов, во время которых был получен хотя бы один ответ. Для этого нужно решить похожую задачу: сколько в среднем различных дней рождения в группе из n человек.

Тут прозвенел звонок.

– Ну как, интересная была сегодняшняя тема? – поинтересовался Иван Петрович

– Очень! – дети дружно закивали головами.

Все потихоньку начали собираться и уходить на перемену. Маша подошла к профессору:

– Спасибо вам большое!

– Не за что, если понадоблюсь – зови, ведь на свете ещё много интересных вероятностных парадоксов, про которые можно рассказать!

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какое минимальное число людей нужно взять, чтобы у каких-то двоих из них совпали знаки зодиака с вероятностью более 1/2?

2. Пусть Костя родился 29 февраля и учится в классе из 30 человек. С какой вероятностью в этом классе найдётся ещё один ученик с таким же днём рождения?

3. В группе 75 человек. Сколько в среднем среди них людей, чей день рождения больше не встречается ни у кого в группе? Оцените их количество как произведение общего числа людей и вероятности того, что у данного человека уникальный день рождения.