НАШ КОНКУРС, XI ТУР

(«Квантик» № 7, 2019)

51. *Как поётся в русской народной песне, «три деревни, два села, восемь девок, один я» – и в каждом из указанных населённых пунктов кто-то из нас живёт. При этом в любой деревне больше девок, чем в любом селе. А Новый год мы всегда празднуем в том единственном месте, где проживает больше всего девок. Где живу я – в деревне или в селе?*

Ответ: в селе. В обоих сёлах кто-то да живёт, так что в одном из сёл живёт хотя бы одна девка. Значит, во всех трёх деревнях живёт хотя бы по 2 девки, и есть деревня с наибольшим количеством девок – в ней хотя бы три девки, итого уже $0+1+2+2+3=8$ девок. Значит, именно так они и распределены, и в одном из сёл девок нет. В этом селе и живёт рассказчик.

52. *Среди 111 монет часть – настоящие и весят одинаково, а остальные – фальшивые и тоже весят одинаково, но они легче настоящих. Монеты разложили на чашечные весы, на левую чашку – 60 монет, на правую – 51 монету, и весы пришли в равновесие. Какое а) наименьшее; б) набольшее число фальшивых монет могло быть? В каждом случае определите, во сколько раз фальшивая монета легче настоящей.*

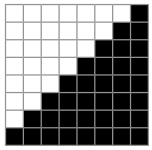
Ответ: а) 10; б) 110. В обоих случаях фальшивая монета в 10 раз легче настоящей.

а) Если мы удалим с левой чаши 9 любых монет, то монет на чашах станет поровну, но правая чаша перевесит. Значит, на левой чаше останется хотя бы одна фальшивая монета. Фальшивых монет тогда не меньше 10, иначе мы можем их все убрать, но ещё должна остаться фальшивая. Если фальшивых монет 10, то они на левой чаше и весят как одна настоящая.

б) Поскольку все монеты не могут быть фальшивыми, их не более 110. Если их 110, то единственная настоящая монета лежит на правой чаше и весит в 10 раз больше фальшивой.

53. *В клетчатой таблице 8×8 строки и столбцы пронумерованы числами от 1 до 8. Квантик отметил некоторые клетки так, что количество отмеченных клеток в каждой строке не больше номера строки, а в каждом столбце – не меньше номера столбца. Сколько всего клеток он мог отметить?*

Ответ: 36. Если в k-й строке отмечено не более k клеток, то всего в таблице отмечено не более $1+2+\ldots+8=36$ клеток. С другой стороны, если в k-м столбце отмечено не менее k клеток, то всего отмечено не менее $1+2+\ldots+8=36$ клеток. Значит, всего отмечено 36 клеток. Пример см. на картинке.



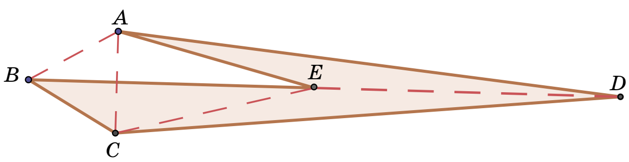
54. *К некому натуральному числу каждую секунду прибавляют 67, 78 или 89. Докажите, что когда-нибудь обязательно получится число, десятичная запись которого заканчивается на 67, 78 или 89.*

Расставим по окружности числа от 00 до 99 по часовой стрелке, положим фишку на число, совпадающее с последними двумя цифрами исходного числа, и будем сдвигать фишку по часовой стрелке на 67, 78 или 89 позиций (это то же самое, что сдвигать её соответственно на 33, 22 или 11 позиций против часовой стрелки).

Назовём числа, из которых мы рано или поздно попадём на 67, 78 или 89, проигрышными. Ясно, что 00 проигрышное, причём числа 67, 78, 89, 00 образуют последовательность с шагом 11. Заметим, что прибавляя к числу 00 по 11 (и беря остаток от деления на 100, если перескочили через 99), мы каждый раз будем получать проигрышное число – ведь из него можно попасть только в 67, 78, 89 или в одно из предыдущих проигрышных чисел. Итак, остатки от деления на 100 всех чисел вида $11k$, где k от 0 до 99, проигрышные. Но все эти остатки различны, поскольку разность $11(x-y)$ не может делиться на 100 при $100>x-y>0$. Значит, все числа от 00 до 99 – проигрышные, что и требовалось.

55. *Верно ли, что из пяти диагоналей каждого невыпуклого пятиугольника можно выбрать три, из которых складывается треугольник? (Диагональ – это отрезок, соединяющий несоседние вершины, некоторые диагонали будут лежать вне пятиугольника.)*

Ответ: нет.



Начнём с равностороннего единичного треугольника ABC. На серединном перпендикуляре к AC выберем точку E так, чтобы E и B были по разные стороны от AC и $CE=2$. Затем на продолжении BE выберем точку D так, что $DE=3$. Пятая диагональ BD больше 5, так как

$BE > CE$. Тогда среди длин диагоналей 1, 1, 2, 3, BD каждое следующее число не меньше суммы двух предыдущих, а значит, треугольника ни из каких трёх диагоналей составить нельзя.

РОБОКРАБ НА МЕТЕОРИТЕ

(«Квантик» № 8, 2019)

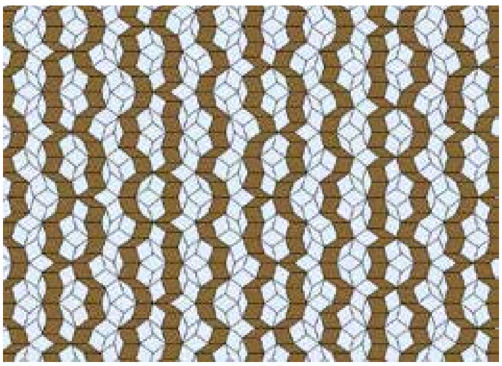
Ответ: да. Пусть в нашем многограннике V вершин и F граней. Сумма плоских углов при каждой вершине строго меньше 360° (так как многогранник выпуклый), а сумма углов в каждой грани равна 360° (так как грани – выпуклые четырёхугольники). Тогда общая сумма всех плоских углов многогранника меньше $V \cdot 360°$ и равна $F \cdot 360°$, откуда $V > F$.

Пусть в каждой вершине сходятся хотя бы 4 грани. Для каждой вершины возьмём число сходящихся в ней граней и сложим все эти числа. Получим минимум $4V$, и каждая грань будет посчитана ровно 4 раза (у неё 4 вершины), откуда всего граней не меньше, чем $4V/4$, то есть $F \geqslant V$ – противоречие. Значит, есть вершина A, в которой сходятся ровно 3 грани. Если робокраб обойдёт эти грани вокруг A, то попадёт в грань, в которой уже был, повернувшимся!

Пусть робокраб дойдёт каким-то путём до грани, содержащей A, сделает оборот вокруг A и вернётся тем же путём в исходную грань. Тогда весь обратный путь он будет повернувшимся по сравнению с положением по пути к A.

КАК МЫ СОБИРАЛИ АБАЖУР, ИЛИ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ТРИАКОНТАЭДРА

К решению последнего упражнения:



ЧТО НЕ ТАК С УГАДЫВАНИЕМ ШЛЯП?

Пусть мудрец A получает шляпы цвета 0 или 1, а мудрецы B и C получают шляпы цветов 00, 01, 10 или 11 (желающие могут считать, что это номера цветов, записанные в двоичной системе счисления). Цифры в обозначениях цветов у мудрецов B и C будем называть *битами*. Пусть мудрецы пользуются такой стратегией.

Мудрец A говорит «0», если младшие биты (то есть биты в правом разряде) цветов B и C одинаковы, а в противном случае, он говорит «1». Два других мудреца смотрят, какая шляпа надета на A, сразу понимают, при каком соотношении их младших битов («равны» или «не равны») мудрец A угадает свой цвет, и начинают придерживаться противоположной гипотезы.

Далее мудрец B смотрит на старший бит мудреца C и говорит свой ответ, исходя из гипотезы, что у него такой же старший бит. А мудрец C смотрит на старший бит мудреца B и говорит ответ, исходя из гипотезы, что у него противоположный старший бит.

Например, пусть мудрецы получают шляпы так A – 0, B – 01, C – 10. Мудрец A смотрит на младшие биты – у мудреца B это 1, у мудреца C – 0, так как биты не совпадают, мудрец A говорит «1». Мудрецы B и C видят у A цвет 0 и принимают предположение, что их младшие биты различны. Далее, мудрец B видит, что у мудреца C старший бит равен 1, и предполагает, что у него старший бит тоже равен 1 (а младший бит не такой, как у C). В результате B говорит «11». Мудрец C видит, что у мудреца B старший бит равен 0 и предполагает, что у него старший бит другой, то есть 1 (а младший бит не такой, как у B). В результате C говорит «10».

Заметим, что каждый раз угадывает ровно один мудрец, и выполнено соотношение $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$. Оказывается, справедлива

Теорема. (*К. Кохась, А. Латышев*) Пусть n мудрецов получают шляпы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цветов. Тогда мудрецы выигрывают в том и только том случае, если

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} \geqslant 1.$$

КАК ПЛАВАЮТ БРЁВНА?

Вот краткое объяснение (подробное мы дадим в одном из следующих номеров журнала). Если вода выталкивает на поверхность треть бревна, его центр масс при вертикальном расположении действительно будет ниже. Но чем ниже подводная часть бревна, тем выше вытесненная им вода. А поскольку вода тяжелее, то и *общий центр масс воды и бревна* выше. Поэтому вертикальное положение бревна неустойчиво, и при малейшем колебании общий центр масс сместится вниз, а бревно всплывёт и ляжет горизонтально.