

Материал подготовили: Дауд Мамий и составители лиги «Старт» Сергей Волчёнков, Заур Датхужев, Олег Дмитриев, Сергей Дориченко, Дмитрий Кузнецов, Аркадий Скоркин

Графы

1. (С. Волчёнков) а) В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что есть круговые маршруты (без повторяющихся городов) из 3, 4, 5, 6, 7 и 8 дорог. Какое наименьшее количество дорог может быть в стране? б) А если есть ещё круговые маршруты из 9 и 10 дорог?

2. (С. Волчёнков) На контурную карту нанесены 10 городов (без названий) и дороги между некоторыми из них. Незнайке задали нанести на карту названия городов, но выдали лишь список пар городов, напрямую соединённых дорогой. По его словам, этого хватило, чтобы однозначно установить название каждого города. Мог ли Незнайка быть прав?

3. (С. Токарев) На утреннике каждый мальчик подарил каждой девочке по конфете и каждая девочка подарила каждому мальчику по конфете. 7 детей дарили только «Белочки», а остальные – только «Коровки», причём «Белочек» и «Коропок» подарено было поровну. Известно, что среди даривших «Белочки» были и мальчики, и девочки. Определите наибольшее возможное число участников утренника.

Логика, игры, комбинаторика

4. (Задача из Эстонии) В классе любые два ученика имеют разный рост. Учитель построил всех учеников в шеренгу так, что среди любых трёх подряд стоящих левый оказывается всегда по росту между средним и правым. После команды «каждому второму ученику сделать шаг вперёд» образуются две шеренги. Докажите, что обе они упорядочены по росту.

5. (Задача из Украины) 99 гномов, некоторые в шляпах, стали в круг. Оказалось, что два гнома в шляпах не могут стоять ни рядом, ни так, чтобы между ними стояло ровно 48 гномов. Какое наибольшее количество гномов может быть в шляпах?

6. (Задача из Словакии) Дано натуральное число n . Петя и Вася играют в такую игру на клетчатой полоске длины 2019. Вася ставит фишку на какое-

Турнир проводится Кавказским математическим центром Адыгейского госуниверситета и Адыгейской республиканской естественно-математической школой каждый сентябрь во Всероссийском детском центре «Орлёнок». В XIV Турнире участвовали 250 школьников с 7 по 11 класс. Приводим избранные задачи лиги «Старт» (полный отчёт тут: adygmath.ru).





то поле. Далее на каждом шаге Петя выбирает натуральное число k , не большее n , а Вася двигает фишку на k клеток вправо или влево по своему выбору. Петя выигрывает, если Вася не может сделать ход. При каком наименьшем n Петя может гарантированно выиграть за конечное число ходов?

7. (Задача из Финляндии) Двум мудрецам в тайне один от другого сообщат по натуральному числу. Им известно, что сумма их чисел будет равна $2^k - 1$, где k – неизвестное натуральное число. Узнав каждый своё число, мудрецы должны будут одновременно поднять по одной руке. Цель мудреца – увидев, какую руку поднял другой (левую или правую), узнать, больше или меньше его число, чем число другого. Как мудрецам заранее договориться, чтобы оба добились цели?

8. (Задача из США) Пусть \leftarrow означает соответствующую клавишу (сдвиг курсора на одну позицию влево). Если в текстовом редакторе последовательно нажать клавиши $ab\leftarrow cd\leftarrow\leftarrow e\leftarrow\leftarrow f$, получится $faecdb$. Для двух буквенных строк A и B назовём B достижимой из A , если можно вставить в A несколько символов \leftarrow так, что после вбивания получится B . Докажите, что если B достижима из A , то и A достижима из B .

Геометрия и комбинаторная геометрия

9. (Фольклор) Муравей ползает только по рёбрам куба и диагоналям его граней, не поворачивая в центрах граней. Он переполз из вершины в противоположную, не посещая ни одну вершину дважды. Какое наибольшее число диагоналей могло быть в его пути?

10. (Д. Кузнецов) Можно ли какой-то выпуклый пятиугольник разбить на 2019 равных треугольников?

11. (Л. Емельянов) Из трёх палочек можно сложить треугольник. От каждой палочки отломали по куску и сложили из них другой треугольник. Всегда ли из оставшихся частей можно сложить треугольник?

12. (С. Волчёнков) У Пети есть картонный круг радиуса 2, а у Васи – N картонных кругов радиуса 1. Петя вырезал из своего круга остроугольный треугольник. Найдите наименьшее возможное значение N , при



котором Вася может гарантированно вырезать из каждого своего круга многоугольник и сложить из них такой же треугольник (без дырок и наложений).

13. (И. Кухарчук) В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH и BY . Перпендикуляры к прямой XY , проведённые через X и Y , пересекают сторону AB в точках M и N . Докажите, что $AN = MB$.

14. (Л. Емельянов) Два отрезка с концами на сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проходят через точку пересечения его диагоналей и оба делятся этой точкой пополам. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

15. (С. Волчёнков) а) На плоскости дана невидимая фигура: либо отрезок, либо треугольник. Разрешается провести прямую, и вам нарисуют на ней проекцию фигуры на эту прямую. Всегда ли за несколько (конечное число) таких действий можно выяснить, какой из двух случаев имеет место? б) А если фигура – либо треугольник, либо выпуклый четырёхугольник?

16. (Л. Емельянов) Треугольник спроектировали на прямые, параллельные его сторонам, и получили три отрезка длиной a , b и c . Известно, что по числам a , b , c длины сторон треугольника однозначно восстанавливаются. Чему может быть равен его наибольший угол?

Арифметика и алгебра

17. (Н. Агаханов) Существует ли такое натуральное число a , что $a \cdot 1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 4$ – точный квадрат?

18. (Н. Агаханов) Даны две параллельные прямые на расстоянии 5. На них отмечены точки A и B так, что $AB = 5$. Кузнечик может находиться только на этих прямых и совершать прыжки длины ровно 13. За какое наименьшее количество прыжков кузнечик может попасть из точки A в точку B ?

19. (С. Волчёнков) Даны N натуральных чисел ($N > 1$). Их наименьшее общее кратное равняется их сумме. При каких N это возможно?

20. (Задача из Албании) Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 1$ и $a_n = n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ при $n > 1$. Найдите все n , для которых a_n делится на $n!$.



Художник Сергей Чуб

