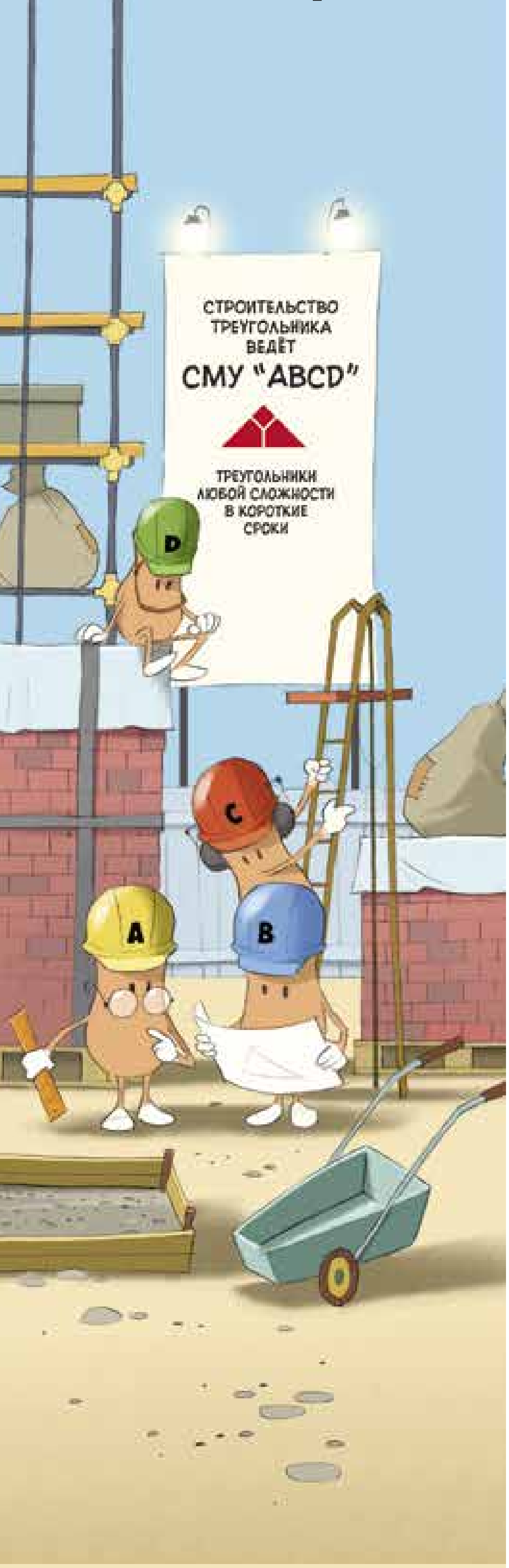
Александр Блинков



Четвёртый признак равенства треугольников

В любом школьном учебнике геометрии вы найдёте три признака равенства треугольников. А верен ли четвёртый признак: по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них? Не обязательно! Вот простой пример. Возьмём равнобедренный треугольник ABC. На его основании AC, но не посередине, отметим точку D (рис. 1). Тогда в треугольниках ABD и CBD сторона BD общая, $AB = CB$ и $\angle BAD = \angle BCD$, а треугольники не равны, так как $AD \neq CD$.

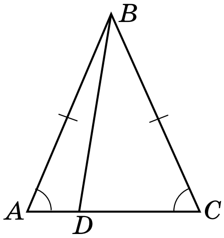


Рис. 1

Но иногда признак работает, а если и нет, то между треугольниками есть связь. Чтобы в этом разобраться, решим задачу: восстановить треугольник ABC, если $AB = c$, $BC = a$ и $\angle BAC = \alpha < 90^\circ$.

Строим угол A, равный α, откладываем на одной из его сторон отрезок AB длины c и проводим окружность с центром B и радиусом a. Далее возможны три случая:

1) Окружность не пересекает другую сторону угла. Тогда задача решений не имеет, и этот случай нам неинтересен.

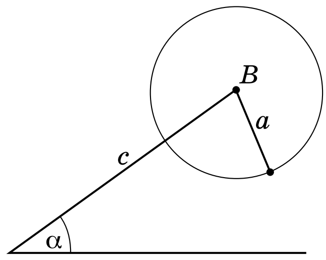


Рис. 2

2) Окружность касается другой стороны угла, тогда задача имеет единственное решение. Но и этот случай неинтересен, так как искомый треугольник – прямоугольный, а признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу хорошо известен.

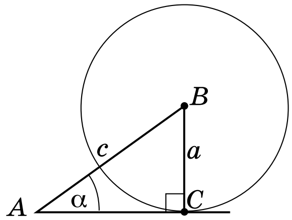


Рис. 3

3) Окружность пересекает прямую, содержащую сторону угла, в двух точках (рис. 4, *а*, *б*).

Если окружность пересекает именно *сторону* угла, как на рисунке 4, *а*, мы получим два неравных треугольника, удовлетворяющих ус-

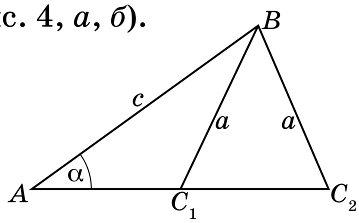


Рис. 4, *а*

ловию задачи: ABC_1 и ABC_2 (и признак не работает). Но отметим, что в этих треугольниках сумма углов C_1 и C_2 равна $180°$ (так как углы AC_1B и C_2C_1B смежные, а угол C_2C_1B равен углу C_1C_2B).

Если же окружность пересекает *продолжение стороны* угла, как на рисунке 4, *б*, задача имеет единственное решение: условию удовлетворяет только треугольник ABC_2 (и признак работает).

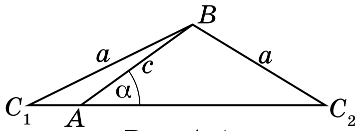


Рис. 4,*б*

Итак, мы доказали утверждение: **пусть две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и равны углы напротив каких-то двух равных из этих сторон; тогда либо треугольники равны, либо сумма углов напротив двух других равных сторон равна 180°.**

Чтобы различить эти два случая, заметим, что $a < c$ на рисунке 4, *а* и $a > c$ на рисунке 4, *б*. Теперь можно сформулировать четвёртый признак равенства треугольников: **если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и равны углы против больших из этих сторон, то такие треугольники равны.**

Упражнение 1. а) Объясните, почему можно не рассматривать случай $a = c$.

б) Рассмотрите случай, когда $\alpha \geqslant 90°$.

Упражнение 2. Угол BAC треугольника ABC равен $15°$. Можно ли однозначно определить сторону AC, если а) $AB = 3$, $BC = 4$; б) $AB = 4$, $BC = 3$? Ответ обоснуйте.

Применим полученные знания на практике.

Пример 1. Две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, и равны высоты, проведённые к одной паре равных сторон. Обязательно ли эти треугольники равны?

Ответ: не обязательно.

Решение. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и его высоту BH. На продолжении стороны AC за вершину A отметим точку D так, что $AD = AC$ (рис. 5). Тогда в треугольни-

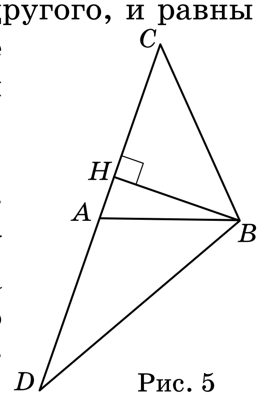
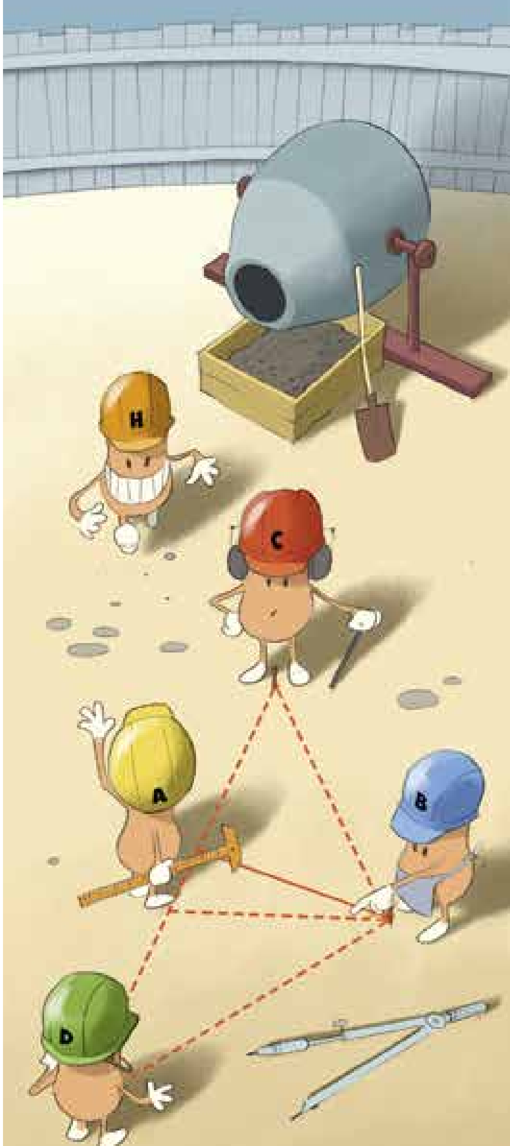
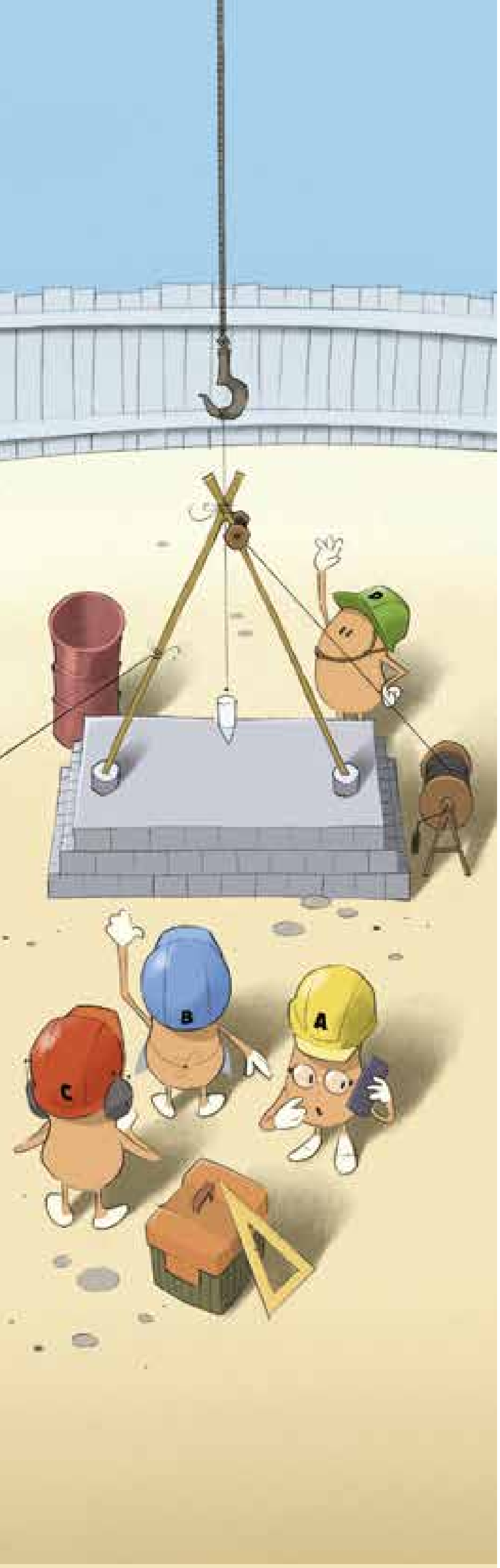


Рис. 5





ках ABC и ABD сторона AB общая, $AC = AD$ и к этим сторонам проведена общая высота. Но эти треугольники не равны, так как ABD – тупоугольный треугольник.

Упражнение 3. Изменится ли ответ, если равные высоты проведены к третьим сторонам?

Пример 2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны углы A и C и стороны AB и CD. Обязательно ли $ABCD$ – параллелограмм?

Ответ: не обязательно.

Решение. На рисунке 6 вы видите четырёхугольник, который получен из треугольника, изображённого на рисунке 1: мы «отрезали» треугольник BCD и приставили его к стороне BD в «перевёрнутом» виде. Тогда в четырёхугольнике $ABCD$ имеем: $\angle A = \angle C$ и $AB = CD$, но параллелограммом он не является, так как $BC \neq AD$.

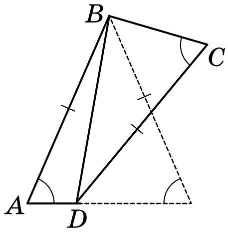


Рис. 6

Пример 3. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка K так, что $\angle AKB = \angle BKC$. Докажите, что прямая BK проходит через середину стороны AC.

Решение. Так как BK – общая сторона треугольников AKB и CKB, из условия задачи следует, что либо эти треугольники равны, либо $\angle KAB + \angle KCB = 180°$ (рис. 7). Но второй случай противоречит теореме о сумме углов треугольника.

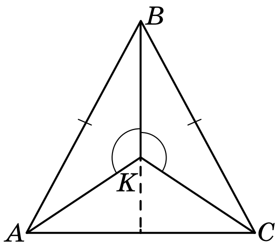


Рис. 7

Из равенства треугольников AKB и CKB следует, что луч BK – биссектриса угла ABC, тогда прямая BK содержит медиану треугольника ABC, то есть пересекает сторону AC в её середине.

Пример 4 (*Т. Казицына, Московская математическая олимпиада, 2003 год, 8 класс*). В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отмечены такие точки X и Y, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC.

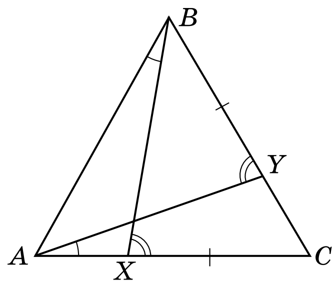


Рис. 8

Решение. Так как углы BXC и AYB внешние для треугольников ABX и CAY соответственно, то $\angle BAX = \angle BXC - \angle ABX = \angle AYB - \angle YAC = \angle YCA$ (рис. 8). Следовательно, треугольник ABC равнобедренный: $AB = BC$.

В треугольниках XBC и YAB имеем: $XC = YB$, $BC = AB$ и $\angle BXC = \angle AYB$. Кроме того, $YB < BC = AB$, значит, $XC < BC$. Так как равные углы лежат напротив больших из рассматриваемых сторон, то эти треугольники равны (по четвёртому признаку). Следовательно, $\angle BCX = \angle ABY$, тогда $AB = AC$. Таким образом, треугольник ABC – равносторонний, значит, каждый его угол равен $60°$.

Обосновать, что из полученных равенств следует именно равенство треугольников, а не случай, когда $\angle XBC + \angle YAB = 180°$, можно иначе:

$$\angle XBC + \angle YAB < \angle ABC + \angle CAB = 180° - \angle ACB < 180°.$$

Ответ: три угла по $60°$.

Предлагаем несколько задач для самостоятельного решения. Часть из них можно решить, не используя фактов и приёмов, рассмотренных выше. Но если их использовать, решения будут наиболее короткими.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки E и D соответственно так, что $AD = CE$. Обязательно ли равны отрезки AE и CD?

2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle C + \angle C_1 = 180°$. Верно ли, что $\angle A = \angle A_1$?

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P так, что $AP = AB$. На стороне AB отмечена точка Q так, что $PQ = PB$. Докажите, что $AQ = CP$.

4. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AC за точку C – точка N, причём $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

5 (*Е. Бакаев, Московская математическая олимпиада, 2019 год, 8 класс*). Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = BC = CK$ и $\angle KAC = 30°$. Найдите угол AKB.

Художник Алексей Вайнер