■ **НАШ КОНКУРС, IV тур** («Квантик» № 12, 2019)

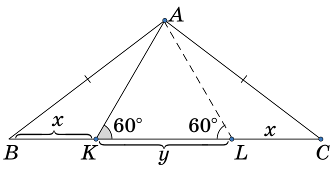
16. *Саша придумал шифр: заменил несколько букв однозначными или двузначными числами, используя только цифры 1 и 2 (разные буквы он заменял разными числами, а одинаковые – одинаковыми). Слово КРОЛИК превратилось в число 1212111212. Слово КРОКОДИЛ тоже превратилось в число. В какое?*

Ответ: 12121122122211. Так как первая и последняя буквы в слове КРОЛИК одинаковы, К = 12. Тогда Р = 1 и И = 2. Тогда О = 21 и Л = 11. Все числа из 1 и 2 с не более чем двумя цифрами использованы, кроме 22. Тогда это Д.

17. *Найдите наименьшее семизначное число, делящееся на 17, в котором все цифры разные.*

Ответ: 1023468. Наименьшее семизначное число с разными цифрами – это, очевидно, 1023456. Оно не подходит, так как при делении на 17 даёт остаток 5 (проверьте). Тогда ближайшее большее число, делящееся на 17, – это $1023456+12=1023468$, и у него разные цифры!

18. *Точка K делит основание BC равнобедренного треугольника BAC на отрезки длины x и y, как показано на рисунке. Найдите длину AK, если угол AKC равен 60°.*



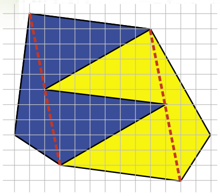
Ответ: $y-x$. Отложим на BC отрезок CL, равный x. Из симметрии картинки, угол ALK тоже будет равен 60°. Тогда треугольник KAL – равносторонний, откуда $AK=KL=KC-CL$.

19. *Квантик и Ноутик хотят показать такой фокус. Зритель задумывает два натуральных числа, различающихся на 1, и сообщает одно Квантику, а другое – Ноутику. После этого Квантик показывает Ноутику чёрную или белую карточку, и Ноутик сразу угадывает число Квантика. Помогите Квантику и Ноутику договориться о своих действиях, чтобы фокус всегда удавался.*

Ноутик выбирает из двух чисел с разностью 2. Их остатки от деления на 4 – либо 0 и 2, либо 1 и 3, и Ноутик знает, какая пара возможна. Пусть Квантик покажет чёрную карточку, если у него остаток 0 или 1, и белую – если 2 или 3.

20. *Разрежьте шестиугольник на рисунке на две равные части.*

Ответ: см. рисунок. Чтобы доказать равенство частей, проведём в каждой из них пунктирный отрезок (см. рисунок). Видно, что каждая часть составлена одним и тем же способом из одних и тех же трёх треугольников (проверяем это, находя длины их сторон по теореме Пифагора).



■ **XLI ТУРНИР ГОРОДОВ** («Квантик» № 1, 2020)

Базовый вариант

1. Ответ: при крайних положениях. Крайнюю карту можно не трогать до конца, так как её номера с одного и другого края всегда разные.

Если тройка треф сначала была не с краю, пусть зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется 3 карты, тройка треф (если она ещё на столе) будет в центре. Зритель назовёт 2.

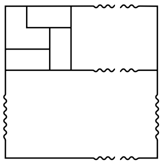
2. Так как $YH \perp OX \perp AP$, то $YH \parallel AP$, а прямая YH содержит среднюю линию треугольника APC. Аналогично, прямая XH содержит его среднюю линию. Эти средние линии пересекаются в точке H – середине стороны AC.

3. Ответ: за 50 рублей. *Оценка.* Каждая фишка должна поменять чётность своего номера. Бесплатная операция не меняет чётность, а платная меняет её у двух фишек.

Пример. Занумеруем фишки подряд числами от 0 до 99. Покрасим клетки в 4 цвета: *abcdabcd…d*. Бесплатная операция меняет фишки в соседних одноцветных клетках. Поэтому в клетках одного цвета фишки можно бесплатно переставить в любом порядке. Поменяем фишки во всех парах *bc* и *da* – это 49 платных операций. В клетках цвета *b* и *c* фишки уже можно бесплатно расставить как нужно. В клетках цвета *a* и *d* поставим фишки 0 и 99 рядом. Поменяем их последней платной операцией и дорасставим все фишки как нужно.

4. Ответ: верно. Из условия следует, что $a_{k+41}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ (индексы зациклим, то есть за 1000 идёт 1). Значит, $a_{k+41n}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ при любом n. Так как 41 и 1000 взаимно просты, квадраты всех чисел на круге дают при делении на 41^2 один и тот же остаток. Тогда $41a_k^2$ делится на 41^2, поэтому a_k^2 делится на 41, а поскольку 41 – простое, то и a_k делится на 41.

5. Так как mnk делится на 3, то m, n или k делится на 3; пусть это высота k. Достаточно заполнить коробку $m\times n\times 3$. Из двух уголков можно сложить кирпич $1\times 2\times 3$. Если mn чётно, разбиваем основание коробки на доминошки 2×1 и ставим на них по кирпичу, заполнив



коробку. Иначе разобьём основание на квадрат 3×3 и два прямоугольника (возможно пустых), см. рисунок. Прямоугольники разобьём на доминошки, а квадрат – как на рисунке. На доминошки ставим по кирпичу, а в оставшееся место – три уголка.

Сложный вариант

1. а) Ответ: для $n=2^k$. Очевидно, 2^k – наименьшее число сложности k. Поэтому все числа между 2^k и 2^{k+1} имеют сложность не больше k. Пусть n – не степень двойки. Тогда между n и $2n$ есть степень двойки (можно взять наибольшую степень двойки, меньшую n, и удвоить её). Очевидно, её сложность больше, чем у n.

б) Ответ: таких чисел нет. В силу пункта а) достаточно рассмотреть случай $n=2^k$, где k – натуральное. Но число $3\cdot2^{k-1}$ имеет такую же сложность, как и n, и находится между n и $2n$.

2. В неравенстве в условии была допущена опечатка, приносим свои извинения. Правильное неравенство, которое надо было доказать:

$$\frac{S}{AB+AC}>\frac{S_1}{A_1B_1+A_1C_1}.$$

Приводим решение для верного условия.

Пусть точки D и D_1 симметричны точкам A и A_1 относительно BC. Проведём биссектрисы AK и A_1K_1 наших треугольников. Тогда K и K_1 – центры окружностей, вписанных в четырёхугольники $ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$, а требуемое неравенство превратилось в очевидное неравенство $r>r_1$, где r и r_1 – радиусы этих окружностей.

3. Назовём ситуацию *победной*, если проведено не более чем $k+1$ взвешиваний и определены веса k монет, причём среди них есть серебряная или две медные. В победной ситуации, сравнивая неизвестную монету с весом 2 г, мы определим её вес, увеличив число известных монет и число взвешиваний на 1, и так определим все монеты не более чем за 101 взвешивание.

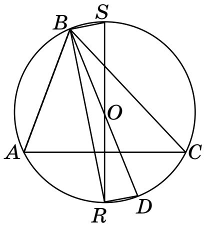
В каждый момент будем сравнивать число *затронутых* (участвовавших во взвешиваниях) монет z с числом взвешиваний v. Сначала выделим одну монету и будем сравнивать незатронутые с ней, пока не найдём монету другого веса. Пусть A – более лёгкая, а B – более тяжёлая из затронутых. Далее сравниваем незатронутые монеты с B, пока снова не получим неравенство. Теперь у нас $v=z-1$; есть одна или несколько монет одинакового веса a, одна или несколько монет другого веса $b>a$ и монета C веса $c\neq b$. Сравним C с A. Возможны два случая.

1) $c=a$. Сравним B с $A+C$, то есть b с $2a$. Возможны варианты: $b=3$, $a=1$ (если $b>2a$); $b=2$, $a=1$ ($b=2a$); $b=3$, $a=2$ ($b<2a$). Во всех случаях ситуация победная: $v=z+1$, веса z монет определены и есть нужные монеты (с общим весом 2).

2) $c\neq a$. Значит a, b, c – три разных веса, они как-то упорядочены и поэтому определены однозначно. При этом $v=z$ – ситуация победная.

Замечание. Можно определить все монеты не более чем за 100 взвешиваний. Попробуйте!

4. Проведём гомотетию с центром B и коэффициентом 2. Точка O перейдёт в точку D, диаметрально противоположную вершине B на описанной окружности Ω, точка P – в точку R пересечения биссектрисы угла B с Ω, точка Q – в диаметрально противоположную R точку S, «отрезок, соединяющий...» – в сторону AC. Осталось заметить, что диаметр RS проходит через середину стороны AC, так как R – середина дуги AC.

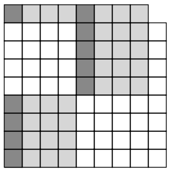


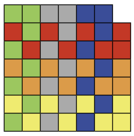
5. Пара $(m,\ m(4m+3)^2)$ хорошая (проверьте). *Путь к решению.* Естественно попытаться найти такое n, что оно есть квадрат, умноженный на m, и при этом $n+1$ имеет вид $k^2(m+1)$. Тогда $n/m=(k^2(m+1)-1)/m=k^2+(k^2-1)/m$ – квадрат. Это легко обеспечить, положив $(k^2-1)/m$ равным $4k+4$, тогда $(k-1)/m=4$, откуда $k=4m+1$.

6. Выясним, сколько мелочи Петя мог получить. Рассмотрим последнюю дешёвую покупку, увеличившую количество мелочи. Пусть стоимость этой покупки x, тогда перед этим было не более $x-1$ рублей мелочи, а значит, после этого её станет не больше чем $x-1+100-x=$ $=99$ рублей. Так как дорогие покупки количество мелочи не уменьшают, все предыдущие покупки вместе с рассмотренной дали в сумме не более 99 рублей мелочи. Тем более все *дешёвые* покупки в сумме принесли не более 99 рублей.

Пусть было n покупок дороже 100 рублей. Каждая из них добавляет не более 99 рублей мелочи. Если бы других покупок не было, то на дорогие было бы потрачено не менее $2n$ сотен, а сдача составила бы не более $99n$ – меньше половины потраченного. Поэтому другие покупки есть. Но тогда у Пети было не менее $2n+1$ сторублёвок, а мелочи в конце стало не больше $99n+99$. Значит, $(2n+1)50\leqslant 99n+99$, откуда $n\leqslant 49$, и мелочи останется не более $99\cdot49+99<$ <5000 руб. Значит, и потрачено менее 5000 руб.

7. Ответ: мог. Оказывается, любой квадрат $(2N+1)\times(2N+1)$ без угловой клетки можно получить, $2N$ раз приложив печать из $2N+2$ клеток. Приведём два примера, которые легко обобщаются. На первом рисунке $(N=4)$ след печати окрашен в тёмно-серый цвет. Сдвигая его вправо на одну клетку, мы постепенно покроем серую область. Развернув печать на 90°, аналогично покроем белую область.





На втором рисунке $(N=3)$ каждый отпечаток покрашен в свой цвет.

ПЕРЕНЕСТИ СТОЛ («Квантик» № 1, 2020)

Закрасим некоторые клетки комнаты и назовём их проходом. Будем передвигать стол по стрелкам, как на рисунках. Сначала повернём стол ножками вбок и разместим его так, чтобы одна пара ножек целиком уместилась в проходе, а другая – немного вошла в ванную (рис. 1). Теперь подвинем стол вдоль прохода (рис. 2) Повернём стол, так чтобы одна пара ножек вышла из прохода в комнату, а другая вышла из ванной и целиком уместилась в проходе (рис. 3). И проносим стол вдоль прохода в комнату.

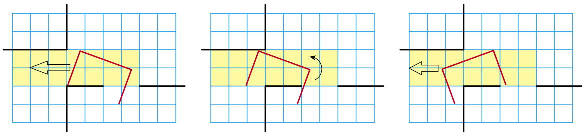
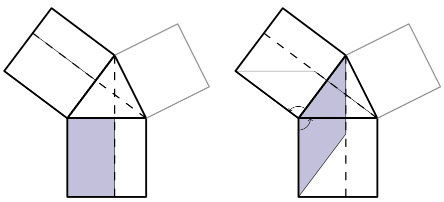


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

ПЛОЩАДИ И ПЕРЕКАШИВАНИЯ

План решения задачи 3. После изображённого ниже перекашивания прямоугольники превращаются в равные параллелограммы: один получается из другого поворотом на 90° вокруг их общей вершины.



XLI ТУРНИР ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Математика

1. Ответ: Толстый и Тонкий должны взять себе по 14 г сыра. Заметим, что теперь долька Серого весит столько же, что и долька Белого, то есть ровно четверть от массы всего сыра. Значит, и Белый, и Серый уже получили свою долю, и все 28 граммов должны быть поделены Толстым и Тонким. Сейчас у них поровну сыра, значит, и получить они должны поровну.

2. Раскроем скобки в каждом из выражений:

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd;$$
$$(a-c)(b-d)=ab-ad-bc+cd;$$
$$(a-d)(b-c)=ab-ac-bd+cd.$$

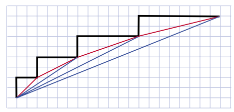
Теперь несложно заметить, что

$$(a-d)(b-c)=(a-c)(b-d)-(a-b)(c-d)$$

– разность двух чисел, делящихся на n.

3. Ответ: нет, не могло. Пусть в одном туре игралось k партий. Так как каждый играл в одной партии, всего участников $2k$. Тогда всего в турнире было $\frac{2k(2k-1)}{2}$ партий, ведь каждый сыграл с $2k-1$ участниками, итого $2k(2k-1)$ «участий» в партиях, а партий в два раза меньше. Но если все судили одинаковое количество встреч, то каждый участник должен был судить $\frac{2k(2k-1)/2}{2k}=\frac{2k-1}{2}$ встреч, а это не целое число.

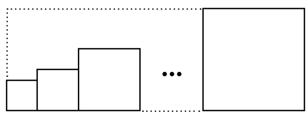
4. Ответ: правда. В каждой ступеньке соединим начало и конец красным отрезком, а начало первой ступеньки соединим с правыми концами остальных ступенек синими отрезками (см. рисунок).



Заметим, что красные отрезки наклонены под всё меньшим углом к горизонтали (так как очередная ступенька длиннее предыдущей).

Так как второй красный отрезок отклоняется вниз от линии первого красного, эти отрезки не пересекаются с первым синим отрезком (лежащим «под ними»). Тогда угол наклона к горизонтали у первого синего отрезка больше, чем у второго красного, а значит, больше и чем у третьего красного. Поэтому следующий синий отрезок не пересечёт предыдущие красные и синие отрезки (тоже будет лежать «под ними»), и т.д.

5. Докажем, что подойдёт наибольшее из данных чисел. Заменим квадрат каждого числа на фигуру – квадрат со стороной, равной числу. Расставим квадраты подряд, по возрастанию. Ясно, что они лежат внутри прямоугольника со сторонами «сумма данных чисел» и «наибольшее из данных чисел». Поэтому их суммарная площадь (сумма квадратов данных чисел) не больше площади прямоугольника, которая равна сумма данных чисел (то есть, 1), умноженной на сторону наибольшего квадрата, то есть равна наибольшему из данных чисел.



Лингвистика

1. Пять слов оканчиваются на *-o* и семь слов – на *-a*. Это существительные и прилагательные соответственно. Найдя общие элементы значения и выделяя части слов, получаем: приставка *mal* «противоположность»; корни *fid* «верить», *alt* «высокий», *tim* «бояться», *pigr* «лениться», *barat* «Индия»; суффиксы *em* «склонный», *ind* «достойный», *an* «житель», *ul* «обладатель свойства». Например, *malaltulo* – это «обладатель свойства противоположности высокому, существительное» = «*коротышка*».

а) fidema – доверчивый, malalta – низкий, fidinda – достоверный, timemulo – трус, timinda – страшный, barata – индийский, malaltulo – коротышка, baratano – индиец, maltimo – бесстрашие, inda – достойный, pigrulo – лентяй, ridema – смешливый.

б) fidemulo – доверчивый человек, простак, верующий, простофиля; ridinda – достойный смеха, смехотворный, смешной; timema – склонный бояться, боязливый, пугливый, трусливый, робкий, застенчивый.

в) недоверчивый – malfidema, высота – alto, склонность – emo, Индия – Barato.

2. Один квадратный знак корейского письма соответствует слогу. Гласный передаётся вертикальной или горизонтальной чертой (а ㅏ, э ㅐ, ɔ ㅓ, е ㅔ, и ㅣ; о ㅗ, у ㅜ, ы ㅡ); в зависимости от этого выбирается расположение знаков для согласных внутри квадрата. Отсутствие согласного в начале слога обозначается специальным знаком. Опираясь на повторы слов и звуков, устанавливаем соответствия.

а) A–5, B–3, C–6, D–1.

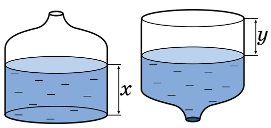
б) 2. 아빠 곰, 엄마 곰, 애기 곰 — Аппа Ком, Эмма Ком, Эги Ком

4. 엄마 곰은 날씬해 — Эмма Комын нальссинхэ

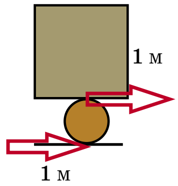
в) 한글 хангыль.

Физика

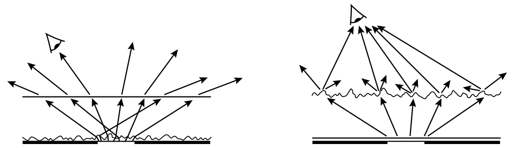
1. Сначала измерим высоту уровня воды в бутылке – x см, потом, заткнув отверстие, перевернём её и измерим высоту воздушной прослойки над уровнем воды – y см (см. рисунок). Поскольку вода занимает более половины бутылки, новый уровень воды снова будет в цилиндрической части бутылки. Тогда объём воздуха относится к объёму воды как y к x, и общий объём бутылки равен $1+y/x$ л.



2. Ответ: 15000 брёвен. Относительно бревна камень и дорога движутся с одинаковыми скоростями в разных направлениях. Поэтому, когда бревно под камнем проезжает метр, камень перемещается на метр относительно бревна – итого на два метра, и относительно камня бревно сдвигается на метр назад. Получается, что на каждые два метра перемещения камня нужно добавлять одно бревно, всего – 30 000/2 = =15 тыс. брёвен.



3. Свет, отражённый от очень маленького участка книги, мысленно представим в виде светящегося пятнышка на книге. Матовая сторона стекла рассеивает свет, то есть из каждой точки матовой стороны к нам приходит свет, собранный с разных направлений. Если стекло лежит матовой стороной вниз, то светящееся пятнышко прилегает к матовой стороне и освещает почти такую же по размерам область матовой стороны, которую мы и видим сквозь стекло (см. рисунок). А если стекло лежит матовой стороной вверх, то пятнышко освещает большую область матовой стороны, и свет попадает в наш глаз со всей этой области; пятнышко оказывается очень размытым, и так же размытым выглядит каждый участок книги.



4. Ответ: Маша права. Вася не учитывает, что шарик не только тянет дно вверх во втором сосуде, он ещё (в обоих сосудах) поднимает уровень воды, вытесняя её и тем самым увеличивая давление у дна. При этом в первом сосуде он полностью погружён в воду, а во втором – он плавает на поверхности. Значит, уровень воды в первом сосуде выше, чем во втором. Можно показать (попробуйте!), что сила давления воды на дно в первом сосуде тогда оказывается больше, чем во втором, ровно на величину силы натяжения нити, тянущей его дно вверх, то есть полные силы, действующие на донья сосудов, одинаковы. Маша показала этот факт с помощью гораздо более простого рассуждения.

Астрономия и науки о Земле

1. Дело в приливных силах. Сила притяжения Луны (синие линии на рисунке 1) неоднородна – меняется от места к месту. Отличия силы притяжения от среднего значения (красные линии на рисунке 1) мнут Землю: растягивают её на доли метра, а воду в океане сдвигают ещё больше, образуя приливы. Так на Земле возникают два «горба», которые должны были бы смотреть один – на Луну, другой – от неё, но Земля своим вращением сносит их, и из-за трения они не успевают «подстроиться». Получается картина как на рисунке 2: приливные горбы смещены так, что притяжение от первого немного разгоняет Луну, а от второго – тормозит, но слабее (так как второй горб дальше).

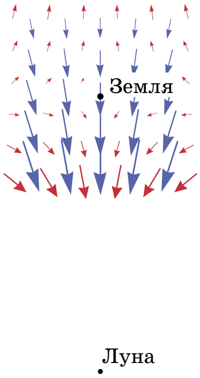


Рис. 1

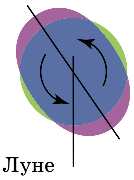


Рис. 2. Размер приливов и угол отставания преувеличены.

В итоге притяжение Луны растягивает Землю, та уносит горбы вперёд, и они своим притяжением утягивают Луну за собой, выводя на более высокую орбиту (а Луна тянет их обратно, тормозя вращение Земли). Так вращение Земли «перекачивается» во вращение пары Земля-Луна (вращение Луны уже всё «перекачалось» и она смотрит к нам одной стороной).

С Марсом и Фобосом всё так же, но он вращается вокруг Марса быстрее, чем сам Марс, поэтому приливные горбы Марса «пытаются остановить» Фобос и он падает на орбиту пониже.

См. также статьи «Земля и Луна: приливы» и «Марс» в «Квантиках» №3 и №4 за 2017 год.

2. Человек на здании на такой высоте движется с угловой скоростью вращения Земли (около 0,6 км/с). Человек на МКС движется с 1-й космической скоростью (около 7,9 км/с) и чувствует невесомость. На здании разница в весе почти не ощутима. Орбита, на которой спутник вращается вокруг Земли со скоростью вращения Земли, называется *геостационарной*. Высота такой орбиты примерно 36 тыс. км. На этой высоте разницы в ощущениях на крыше здания и на спутнике не будет.

3. Мираж возникает из-за того, что разные слои воздуха имеют разные оптические свойства. Это может быть вызвано либо разницей в температуре, либо во влажности. Например, перепад возникает над раскалённой на солнце асфальтовой дорогой или песком, над ледником, если он значительно холоднее воздуха, над крупным водоёмом в жаркую погоду, когда испарение воды интенсивное. Если смотреть в сторону горизонта над такой поверхностью, то можно увидеть мираж, потому что лучи света над ней летят не по прямой, и вид искажается. В пустынях чаще можно увидеть мираж, чем в степи, потому что в пустыне солнце жарче и песок хорошо нагревается, а растения – плохо. Мираж лучше видно в безветренную погоду, потому что при перемешивании оптические свойства разных слоёв воздуха выравниваются. Подробнее читайте в статье «Жидкое зеркало» в «Квантике» №8 за 2013 год.

Биология

Причины могут быть самые разные. В новом месте более подходящие почвы, влажность, освещённость, больше переносчиков спор, плодов и семян. Или может не быть конкурентов, паразитов, болезней и поедателей, что были в родном регионе. К примеру, если клён ясенелистный в XIX веке был локализован на своей родине, Северной Америке, а на нашем континенте выращивался лишь в парках, то сейчас его трудно не встретить почти в любом российским городе. Причина в том, что им активно озеленяли города в советское время из-за того, что он быстро растёт. Хорошо растёт на нарушенных почвах: в плохо обустроенных дворах, у гаражей, на пустырях. Доминирует в поймах рек и озёр, вытесняя аборигенные виды. На родине клёна на нём обычно можно встретить жука, который предпочитает это дерево и личинки которого поедают его листья. Этот жук не обитает на нашем континенте.

Несколько аналогичных примеров: недотрога желёзконосная завезена из Гималаев как декоративное растение, селится на обочинах дорог, вдоль вырубок, в сырых оврагах, на пустырях, в поймах рек; золотарник канадский завезён как лекарственное и декоративное, селится в городах и вдоль дорог; борщевик Сосновского завезён с Кавказа как кормовое растение для скота, селится вдоль дорог, на необрабатываемых участках полей, в долинах рек.

Это примеры растений, завезённых в Россию человеком и распространившихся в местах, созданных человеком. Поэтому выделим ещё один ответ в задаче: приспосабливаемость на нарушенных человеком территориях.