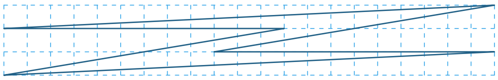
НАШ КОНКУРС, V тур («Квантик» № 1, 2020)

21. *Барон Мюнхгаузен огородил свои владения забором в форме шестиугольника. Он утверждает, что каждый внутренний угол этого шестиугольника либо меньше 10°, либо больше 350°. Может ли барон быть прав?*

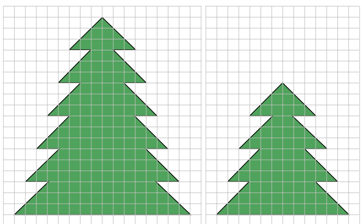
Ответ: да, см. пример на рисунке.



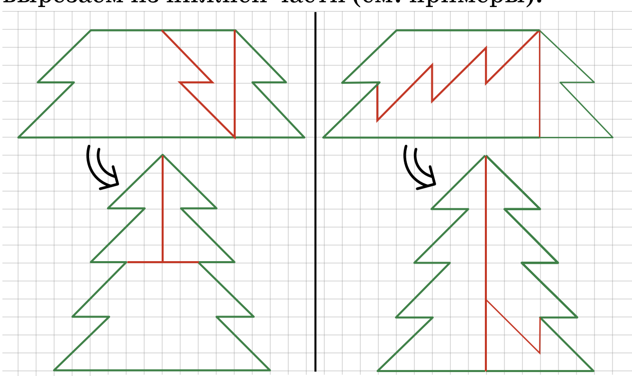
22. *Вася написал на листке 10 цифр (среди них могут быть равные) так, чтобы сумма любых трёх написанных цифр не превосходила 14. Какова наибольшая возможная сумма всех 10 цифр? (Приведите пример и докажите, что большую сумму получить нельзя.)*

Ответ: 42. Рассмотрим три наибольшие цифры. Хотя бы одна из них не больше 4 (иначе их сумма не меньше 15). Но тогда и каждая из остальных семи цифр не больше 4. А общая сумма не превосходит $14+7\cdot4=42$. В качестве примера можно взять 5,5,4,4,4,4,4,4,4,4.

23. *Ёлочку на рисунке слева разрежьте на четыре части и сложите из них две одинаковые ёлочки, как на рисунке справа.*



Ответ: одну ёлочку отрезаем сверху, вторую вырезаем из нижней части (см. примеры).



24. *Вычислите сумму*

$$\frac{100}{99}+\frac{100\cdot98}{99\cdot97}+\frac{100\cdot98\cdot96}{99\cdot97\cdot95}+\ldots+\frac{100\cdot98\cdot96\cdot\ldots\cdot4\cdot2}{99\cdot97\cdot95\cdot\ldots\cdot3\cdot1}.$$

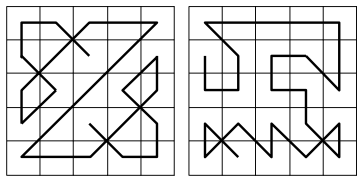
Ответ: 100. Перепишем сумму в таком виде: $\frac{100}{99}\cdot\left(1+\frac{98}{97}\cdot\left(1+\ldots.\left(1+\frac{4}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{1}\right)\ldots\right)\right)\right)$. В скобке, которая внутри всех остальных, сумма равна $1+\frac{2}{1}=3$. В предпоследней по вложенности скобке получается $1+\frac{4}{3}\cdot(3)=5$, и так далее: в каждой следующей скобке сумма увеличивается на 2 за счёт умножения на дробь и прибавления 1. В итоге получаем $\frac{100}{99}\cdot(99)=100$.

25. *Квантик и Ноутик по очереди закрашивают клетки на доске 8×8, по одной клетке за ход, начинает Квантик. Первый ход можно сделать куда угодно. Каждый следующий ход должен быть таким, что новая клетка граничит по стороне ровно с одной закрашенной клеткой. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто может обеспечить себе победу?*

Ответ: Квантик. Пусть Квантик сделает первый ход в угловую клетку, а дальше делает ходы, симметричные ходам Ноутика относительно диагонали, выходящей из этого угла. После первого хода Квантика картинка обладает таким свойством: она симметрична относительно диагонали, и каждая клетка диагонали граничит с чётным количеством закрашенных клеток. Это значит, что Ноутик не сможет пойти на диагональ и Квантик сможет ответить ему симметричным ходом, сохранив свойство. Тогда у Квантика и дальше всегда будет ход.

КОРОЛЬ ЛАТИНСКОГО КВАДРАТА («Квантик» № 2, 2020)

Прав всё-таки Коля. Есть ещё два маршрута, порождающих латинские квадраты:



(первый из них, кстати сказать, центрально-симметричный). Вот соответствующие заполнения клеток числами:

3	2	9	10	11
4	8	1	12	20
7	5	13	21	19
6	14	25	18	22
15	16	17	24	23

5	6	7	8	9
1	4	13	12	10
2	3	14	15	11
24	22	20	16	18
23	25	21	19	17

А вот и сами латинские квадраты:

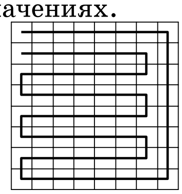
3	2	4	0	1
4	3	1	2	0
2	0	3	1	4
1	4	0	3	2
0	1	2	4	3

0	1	2	3	4
1	4	3	2	0
2	3	4	0	1
4	2	0	1	3
3	0	1	4	2

Других маршрутов (кроме трёх приведённых) *не существует* – проверено с помощью компьютера (хотя сами маршруты были найдены без компьютера!).

Интересен вопрос о существовании маршрутов с аналогичными свойствами для досок иных размеров – $n \times n$. Для чётных n имеется довольно простой алгоритм, позволяющий получить по крайней мере одно решение. Начав с левой верхней клетки, король движется сначала вправо «до упора», потом вниз – тоже «до упора», а затем обходит оставшиеся поля «змейкой» снизу вверх – то влево, то вправо. Ему не требуется даже делать диагональных ходов! На рисунке ниже приведён пример для классической шахматной доски 8×8.

Для нечётных n всё намного сложней. Конечно, для доски 3×3 найти нужный путь короля труда не составляет. Для $n = 5$ ответ тоже известен (см. выше). Было также обнаружено несколько маршрутов короля и для $n = 7$. Дальнейшее – во мраке. Для компьютера даже квадрат 7×7 оказался неподъёмным, не говоря уже о бóльших значениях.



ИМЯ ЗВЕРЯ («Квантик» № 2, 2020)

· Наверняка вы знаете больше названий, чем мы. Но можно вспомнить такие: летучая и морская лисицы; бычок (рыба), овцебык, лягушка-бык; луговая собачка (грызун), летучая собака, целое семейство рыб «собачковые».

· Гепард.

· Стрекоза, скорее всего, называется так по действию *стрекать* (сравните: (*за*)*дать стрекача*) или *стрекотать* (из-за шуршания крыльев). А вот *козослон* (таинственное средневековое животное), *козявка* и даже *козерог* (как реальный горный козёл, так и мифический персонаж) происходят от козы.

· *Буйвол* уже в древнерусском языке вызывал ассоциации с волом, но на самом деле слово имеет латинское происхождение и состоит из одного корня. *Мормыш* — сейчас так называют мелких рачков, а в XVIII в. *мóрмышем* звали и головастиков, но к мышам это слово отношения не имеет.

АЛЕКСАНДР II, ГУМИЛЁВ, МАРКОВ («Квантик» № 2, 2020)

Придумана история о Гумилёве. Надпись на клинке про героя Первой мировой войны могла появиться только после Второй мировой войны.

История о Маркове написана по мотивам воспоминания Б. А. Кушнера «Учитель» (К столетию А. А. Маркова, Мл.) в сборнике «Из истории кибернетики» (Новосибирск: Гео, 2006).

ВОДА, ЧАЙНИКИ И НЕМНОГО ФИЗИКИ («Квантик» № 2, 2020)

Два чайника. Одинаково. Хотя у мышки, идущей первой, чайник больше, диаметр дна у чайников один и тот же и концы носиков расположены на одинаковой высоте («лишняя» вода будет сразу вытекать из носика). При желании первая мышка могла бы налить больше воды, наклонив чайник сильнее – так, чтобы конец носика был на уровне верхнего отверстия чайника.

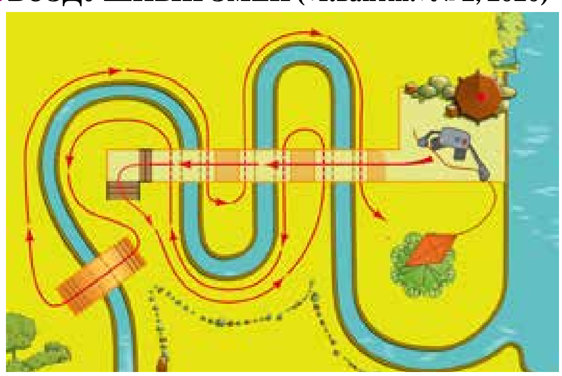
Два разных чайника. Правый – у него больше площадь соприкосновения с плитой.

Два одинаковых чайника. Чайник Ани вскипит быстрее: в Борином чайнике надо будет не только вскипятить всю имеющуюся холодную воду, но и довести до кипения подлитую горячую. Подумайте, изменится ли ответ, если подлить в Борин чайник кипяток.

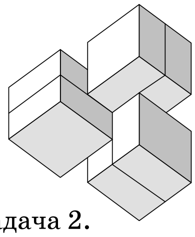
Чайный пакетик. Нитка пакетика закручена при изготовлении, так что немного вращаться будет даже сухой пакетик. Но пакетик лёгкий, и нить не может раскрутиться полностью. После намокания пакетик становится тяжелее, нить натягивается и раскручивается дальше.

См. также статью «Простая скрепка может удивить» автора задачи про чайный пакетик в этом номере журнала.

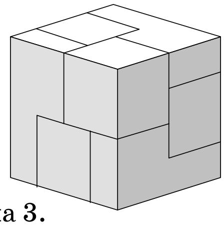
ВОЗДУШНЫЙ ЗМЕЙ («Квантик» № 2, 2020)



КУБИК ДЛЯ НАЧИНАЮЩИХ



Задача 2.



Задача 3.

LXXXVI САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ.

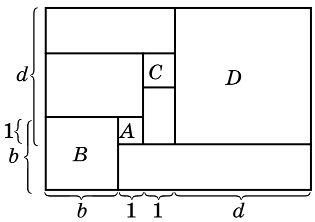
Избранные задачи I тура.

1. Хотя примеров таких таблиц много, находить их подбором – дело трудоёмкое. Но задача станет совсем несложной, если следить не за самими числами, а за их остатками при делении на 3. В таблице справа расставлены две единицы и четыре нуля, суммы по строкам и столбцам равны 0, 1, 1, 1, 1. Никакие два из этих чисел в сумме не делятся на 3. Теперь, чтобы получить требуемый пример, остается расставить в таблице произвольные различные натуральные числа с указанными остатками (число 217 дает остаток 1).

1	1	0	0
1	0	1	0
	1	1	0

217	3	6
9	1	12

2. Ответ: 129 и 132. Пусть стороны квадратов B и D равны b и d соответственно. Легко видеть, что вертикальная сторона исходного прямоугольника равна $b+d-1$ (поскольку сторона квадратика A равна 1), а горизонтальная равна $b+d+2$ (см. рисунок). Поэтому периметр равен $2(2b+2d+1)=$ $=4b+4d+2$. Тогда $4b+4d+2=522$, то есть $b+d=520/4=130$. Отсюда и следует ответ.



3. Заметим, что каждый внимательный школьник в сумме за два утра проедет весь круг. Поэтому длина круга равна $1000:10=100$ км. С другой стороны, найдётся невнимательный школьник A, который в сумме за два утра проехал более $4500:90=50$ км. Это значит, что сумма расстояний от дома A до ближайших к нему с обеих сторон школ больше половины длины круга. Иными словами, расстояние между этими двумя школами по другой дуге (не содержащей дома A) меньше половины круга, причём все остальные школы находятся именно на этой дуге. Это и требовалось доказать.

4. Ответ: 198 раз. Пусть школьник A говорит школьнику B фразу «У меня чужая шапка». Если у него в самом деле чужая шапка, то он говорит правду, и значит, на школьнике B надета его собственная шапка. После обмена шапками у обоих будут чужие шапки: у A будет шапка B, а у B тоже будет чужая шапка, так как свою он только что отдал A.

Совершенно аналогично, если на A надета его шапка, то он обманывает B, и поэтому на B надета чужая шапка. И тогда после замены оба получат чужие шапки.

Таким образом, в каждом обмене участвует один ребёнок в чужой шапке и один ребёнок в своей шапке, и в результате обмена количество детей в чужих шапках увеличивается ровно на 1. Если вначале все дети были в своих шапках, то ни одного обмена произойти не могло. Нетрудно понять, что невозможен случай, когда у всех детей своя шапка, а у одного ребёнка чужая. Если же в самом начале было не менее 2 детей в чужих шапках, то увеличиваться это число сможет не более 198 раз.

Пример сразу следует из проведённого анализа. Пусть вначале было ровно двое детей в чужих шапках (они надели шапки друг друга). Тогда ребенок в чужой шапке может 198 раз обращаться к детям в своих шапках, меняться с ними шапками, увеличивая число неправильно одетых детей. Через 198 обменов все окажутся в чужих шапках и процесс прекратится.

5. Рассмотрим лишь зелёные и красные точки. Поскольку зелёных точек больше, между какими-то двумя зелёными нет красной. Но тогда между ними на окружности стоит одна синяя точка. Она-то и удовлетворяет условию.

6. Ответ: $k=33$, то есть все полоски должны быть вертикальными. Покрасим клетки 1-го, 4-го, 7-го, ..., 100-го столбца в красный цвет, а клетки 2-го, 5-го, 8-го, ..., 98-го столбца – в синий цвет. Красных столбцов на 1 больше, чем синих, а красных клеток на 99 больше, чем синих. Поскольку в каждом столбце находится ровно k вертикальных полосок, красных вертикальных полосок ровно на k больше, чем синих, и красных клеток в них занято на $3k$ больше, чем синих. А в каждой горизонтальной полоске поровну красных и синих клеток (по одной). Поэтому общее количество красных клеток на $3k$ больше общего количества синих. Таким образом, $99=3k$, $k=33$.