ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№3 ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ

март 2014

ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

СОННАЯ ЛУНАТА

Enter

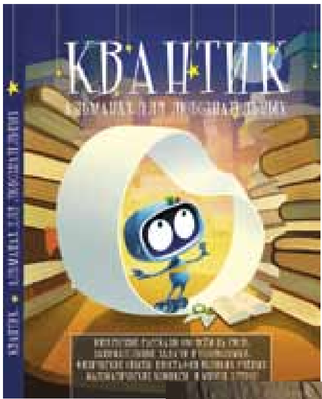
№ 3 | март 2014
Издаётся при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

e-mail: kvantik@mccme.ru

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Вы можете оформить подписку на «Квантик» в любом отделении Почты России. Подписаться на следующий месяц можно до 10 числа текущего месяца. Наш подписной индекс **84252** по каталогу Роспечати.

Почтовый адрес: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., д.11, журнал «Квантик». Подписной индекс: 84252



Первые три выпуска
АЛЬМАНАХА «КВАНТИК»
с материалами номеров 2012 года
и первого полугодия 2013 года,
а также все остальные вышедшие
номера можно купить в магазине
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА»
по адресу: г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11,
http://biblio.mccme.ru
или заказать
по электронной почте:
biblio@mccme.ru

www.kvantik.com
@ kvantik@mccme.ru
kvantik12.livejournal.com
vk.com/kvantik12

ISSN 2227-7986
03
9 772227 798145

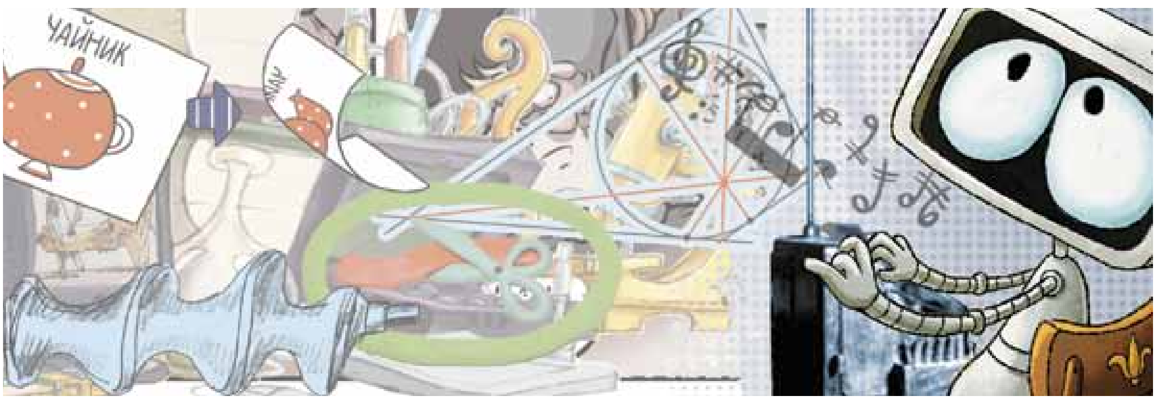
Появилась подписка на электронную версию журнала!
Подробности по ссылке: **http://pressa.ru/magazines/kvantik#/**

Главный редактор: Сергей Дориченко
Зам. главного редактора: Ирина Маховая
Редакция: Екатерина Антоненко, Александр Бердников, Алексей Воропаев, Дарья Кожемякина, Андрей Меньщиков, Максим Прасолов, Григорий Фельдман
Главный художник: Yustas-07
Верстка: Ира Гумерова, Рая Шагеева
Обложка: художник Александра Будилкина
Формат 84х108/16. Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
ISSN 2227-7986
Тираж: 3000 экз.
Адрес редакции: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499)241-74-83. e-mail: kvantik@mccme.ru

По вопросам распространения обращаться по телефону: (499) 241-72-85;
e-mail: biblio@mccme.ru
Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс **84252**.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ



СВОИМИ РУКАМИ

ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ

Сергей Дворянинов

Вспоминая башню Турайдского замка в Сигулде...

С какими линиями сталкиваемся мы чаще всего? Кромка стола – прямая, а вот круглая тарелка напоминает нам об окружности. Отрезаем за завтраком колбасу для бутерброда – перед нами оказывается эллипс, а когда бросаем друг другу на утренней зарядке мяч, он летит по параболе – так называется криволинейная траектория мяча. Все перечисленные нами линии – плоские, то есть каждую из них можно поместить на плоскость. А с чего надо начинать, если мы хотим рассматривать пространственные кривые? Какую пространственную кривую следует считать простейшей? Наверное, ту, которая чаще других оказывается перед нами и с которой мы чаще всего имеем дело! Несомненным претендентом на эту роль является *винтовая линия*.

Эту линию легко увидеть во время... завтрака! Присмотритесь к крышке, которую вы отвернули с бутылки кефира, йогурта или с банки кофе. На внутренней стороне крышки видна спираль (рис. 1). Её научное название – винтовая линия. Такая же линия располагается на внешней стороне горлышка бутылки (рис. 2). Пружина шариковой ручки – тоже винтовая линия (рис. 3).

Помните начало романа «Мастер и Маргарита»? Поэт Иван Бездомный пытается догнать Воланда и его свиту: «Злодейская же шайка... решила... уходить врассыпную. Регент с великою ловкостью на ходу *ввинтился* в автобус, летящий к Арбатской площади, и ускользнул».

Круговым вращением мы ввинчиваем шуруп в стену или доску, а электрическую лампу – в патрон, навинчиваем гайку на винт или болт, отвинчиваем крышку тюбика с зубной пастой... Каждый без труда продолжит список примеров, когда мы что-то во что-то ввинчиваем. Посмотрите на нить накала электрической лампы через

Рис. 1

Рис. 2

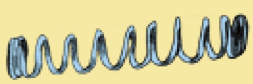


Рис. 3

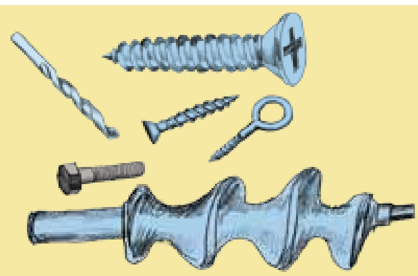


Рис. 4

лупу. Нить – это спираль очень малого радиуса, иногда двойная, и тоже имеет форму винтовой линии.

Винтовые поверхности применяли ещё в Древнем мире. Архимед изобрёл винт, названный его именем. Он применяется для перемещения жидкостей и сыпучих веществ. Похожую на этот винт форму имеет шнек – деталь мясорубки и снегоуборочной машины (рис.4). Резьбу для соединения двух деталей использовали уже в Древнем Риме. Но такой способ стоил дорого и потому применялся только в ювелирных украшениях и редких медицинских инструментах. В средние века наружную резьбу изготавливали так: на цилиндрическую заготовку наматывали верёвку, смоченную краской. Затем по оставленному следу вручную проделывали канавку.

Широкое распространение винты и гайки получили в начале XIX века. Винтовые линии бывают двух направлений – левая и правая. Чтобы *открыть* водопроводный кран, его следует вращать *против* часовой стрелки.

Изготовить винтовую линию несложно. Возьмите кусок мягкой проволоки и плотно намотайте её на круглый карандаш. Затем снимите с карандаша и немного растяните.

Легко получить и математическую модель винтовой линии. Вырежьте из бумаги любой прямоугольник, оставив с одной его стороны язычок для склеивания (рис. 5). Проведите диагональ прямоугольника и затем склейте круговой цилиндр (рис. 6). Диагональ превратится в один виток винтовой линии. При этом она может оказаться или внутри цилиндра, или снаружи.

Двигаясь по винтовой линии, мы поднимаемся по боковой поверхности цилиндра от его основания вверх. Если вместо одной диагонали прямоугольника провести, например, четыре отрезка так, как показано на рисунке 7, то мы получим винтовую линию с меньшим (в четыре раза) шагом и меньшим углом подъёма (рис. 8).


Рис. 5

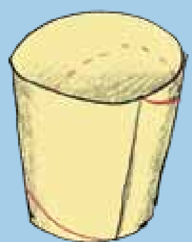


Рис. 6

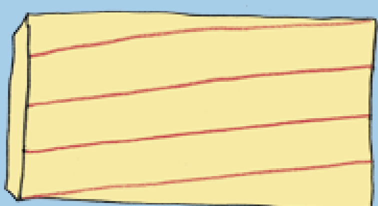


Рис. 7

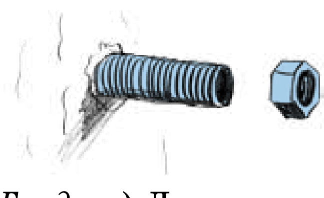

Рис. 8

А теперь вообразите, что винтовая линия – это узкая лестница, которая вьётся по внутренней стороне средневековой башни от входа наверх. Башня – это фортификационное военное сооружение. Вход неширок, чтобы его легко было оборонять. Но вот случилась беда, противник ворвался внутрь и пытается по лестнице пробиться наверх. На лестнице умещается только один наступающий. В правой руке у него меч. Меч в руках и у защитника крепости. Но лестницы строили так, чтобы защитник орудовал мечом из-за угла налево – это естественно, если меч в правой руке. А нападающему приходилось бить из-за угла направо, что правше очень неудобно. Вот поэтому винтовые лестницы внутри оборонительных башен имели не любое, а вполне определённое направление вращения!..

Если винтовую линию сдвинуть на высоту витка, то она самосовместится. А если на половину этой высоты? Получится ещё одна винтовая линия, параллельная исходной. Это обстоятельство использовал Леонардо да Винчи при проектировании двойной винтовой лестницы во французском замке Шамбор: удобно подниматься по одной линии, а спускаться – по другой, чтобы не сталкиваться. Эта лестница имеет по два входа на каждом этаже.

А теперь, если вы хорошо разобрались в устройстве винтовой линии, решите две задачи.

1. Чтобы завернуть винт, отвёртку крутят по часовой стрелке. В какую сторону нужно крутить гайку, чтобы навернуть её на винт, головка которого вмурована в стену – по часовой стрелке или против?



2. (*Мартин Гарднер*) Два одинаковых болта сцеплены резьбой, как на рисунке 9. Один болт проворачивают вокруг второго так, что вокруг своей оси ни один из них не крутится. Будут ли при этом головки болтов сближаться, расходиться или оставаться на прежнем расстоянии?

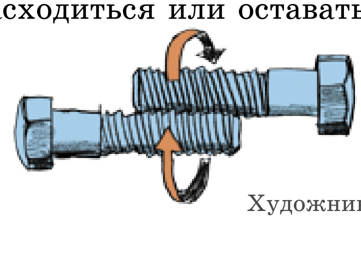


Рис. 9

Художник Артём Костюкевич

ЛЕВ ТЕРМЕН:
НЕ БОЛЕЕ И НЕ МЕНЕЕ

Светлана Ковалёва

Он встречался с Чарли Чаплином, Альбертом Эйнштейном, Айседорой Дункан, Бернардом Шоу, Лениным и Рокфеллером, работал с Туполевым. Человек с фантастической судьбой, человек-миф – Лев Сергеевич Термен. Великий изобретатель, создатель *первого в мире* телевизионного устройства и *первого в мире* электромузыкального инструмента, разведчик будущего и просто советский разведчик…

Лев Термен (1896–1993)

РОЖДЕНИЕ ТЕРМЕНВОКСА

На старинном гербе древнего французского рода Терменов – многозначительный девиз: «Не более и не менее». Во времена Великой французской революции один из Терменов бежал в Россию. Спустя столетие, в 1896 году, в обрусевшей французской семье, в Санкт-Петербурге родился мальчик, которого назвали Львом.

С юных лет он поражал окружающих своими талантами: Лев увлекался математикой, физикой, ставил опыты, в его комнате вечно что-то взрывалось, пугая родителей. Учась в гимназии, он построил обсерваторию и даже открыл астероид. Поступив в Петроградский университет, учился одновременно по двум специальностям: физической и астрономической, параллельно занимаясь в консерватории по классу виолончели. Успел закончить ещё до революции и офицерскую школу, поэтому был призван в Красную армию в электротехнический батальон, где собрал мощную радиостанцию и занимался радиоразведкой.

В 1920 году Лев Термен начинает работать у профессора А. Ф. Иоффе в только что созданном Физико-техническом институте в Петрограде. Как-то молодой учёный заметил, что от движения рук возле пластин конденсатора (зазор между ними был заполнен газом) возникают странные, чудесные звуки. Термен попытался сложить мелодию – помогли занятия в консерватории – и прибор запел. Термен приспособил

Термен играет на терменвоксе

Афиша концерта «радиомузыки». 1922 г.

наушники и наслаждался музыкой, рождающейся из воздуха и движения рук. В институте шутили: «Термен играет на вольтметре». Так был создан первый в мире бесконтактный музыкальный инструмент.

Необычным инструментом заинтересовался В. И. Ленин и пригласил изобретателя к себе. Термен исполнил вождю мирового пролетариата «Лебедя» Сен-Санса. Восхищённый Ленин решился сам испробовать инструмент и с помощью Термена сыграл «Жаворонка» Глинки. Но особенно привлек внимание Ленина второй вариант прибора – «электронный сторож», устройство для бесконтактной охранной сигнализации. Достаточно было спрятать антенну прибора в раму окна или в дверь, и при приближении злоумышленника «электронный сторож» издавал пронзительный вой! Прибор тут же установили в Госбанке, Гохране и Скифском зале Эрмитажа.

Ленин даёт добро на гастроли Термена по всей стране. Москва, Петроград, Ярославль, Минск, Нижний Новгород – более 150 лекций-концертов в городах и сёлах России. Изобретатель назвал свой инструмент «терменвокс» («голос Термена»). Премьера первого симфонического сочинения для оркестра и терменвокса состоялась в мае 1924 года в Петрограде. Газеты писали: «Изобретение Термена – музыкальный трактор, идущий на смену сохе».

Лев Термен с инструментом

ПИОНЕР ТЕЛЕВИДЕНИЯ

Одновременно с концертами Термен работает в Физико-техническом и поступает в Политехнический институт. Иоффе даёт ему, казалось бы, фантастическую тему для дипломной работы: «электрическое дальновидение». Но Иоффе верит, что его гениальный дипломник справится с любым заданием. И Термен не разочаровал учителя: он создал и продемонстрировал действующие макеты устройства для «беспроволочной» передачи изображения на расстояние. Попросту говоря, в 1926 году Термен изобрёл телевизор!

Газеты и журналы захлёбывались от восторга. Имя Термена входит в историю мировой науки наряду с Поповым и Эдисоном! Почему же Термен не упоминается ни в одной энциклопедии и ни в одном справочнике по телевидению? Почему регулярное телевещание в нашей стране началось только в 1939 году?

После защиты дипломного проекта Термен был приглашён на «высокую» комиссию, в которую входили Орджоникидзе и будущие маршалы Ворошилов, Будённый, Тухачевский. Термен подготовил к демонстрации аппаратуру (дело происходило в здании Наркомата обороны на Арбате), выставил объектив на улицу, и красные полководцы дружно вскрикнули от восторга, когда на экране появилась знакомая всем фигура – по двору шёл Сталин. «Дальновидение» тут же засекретили, предполагая использовать его для охраны государственных границ СССР. Имя изобретателя было тоже засекречено и забыто. Только в 1980-х годах материалы дипломной работы Термена стали достоянием гласности и полностью подтвердили его приоритет в изобретении телевидения. Одного этого вклада было бы достаточно, чтобы обессмертить имя изобретателя, а для него это был лишь один из эпизодов его жизни.

«РУССКИЙ ИЗВЛЕКАЕТ МУЗЫКУ ИЗ ВОЗДУХА»

В 1927 году Льва Сергеевича направляют во Франкфурт-на-Майне, на Международную выставку – прославлять при помощи терменвокса советскую науку и культуру. После выставки Термен с триумфом объездил всю Германию, выступал в знаменитом лондонском Альберт-Холле и в парижской Гранд-Опера. Пресса всех стран была заполнена восторженными отзывами. Альберт Эйнштейн писал: «Свободно извлекаемый из пространства звук – это совершенно новое явление».

После головокружительного успеха в Европе Термена командировали в Америку. Официально он представлял Народный комитет просвещения. Но была и другая, секретная миссия – собирать информацию об американском образе жизни, о планах политической верхушки, встречаться с военными, с представителями американского военного бизнеса.

АМЕРИКАНСКИЙ «МИЛЛИОНЕР»

Термен прожил в Нью-Йорке целое десятилетие. Он покупает «кадиллак», его принимают в элитарный

«Механическая телевизионная система» – дипломная работа Льва Термена в институте Иоффе. 1925 г.

THEATRE NATIONAL
OPÉRA
JEUDI 8 DÉCEMBRE 1927
LA MUSIQUE
des
"Ondes Ethérées"
CONFÉRENCE et CONCERT
LÉON THÉRÉMIN
Au Piano GAVEAU : M. DANIEL JEISLER
LE MIRACLE — LE CHEVALIER A LA ROSE
LA VALKYRIE — THAÏS

Афиша концерта Льва Термена в Париже

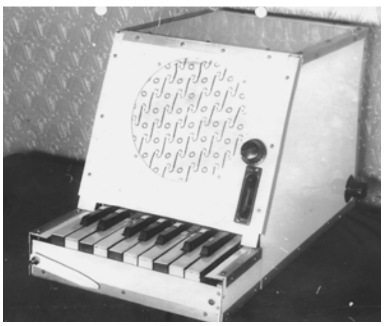
Терменвокс. Произведён компанией RCA.

Клуб миллионеров США, хотя миллионером он так и не стал. Процветает созданная им компания по выпуску систем бесконтактной охранной сигнализации. Компании «Дженерал Электрик» и RCA приобрели лицензию на изготовление терменвоксов и выпустили их около тысячи штук. В 1930 году Термен изобретает электронную виолончель и свою первую ударную установку – «ритмикон». Он берёт в аренду на 99 лет шестиэтажный дом, где открывает музыкальную студию, инструментальные мастерские и лаборатории, обучает музыкантов игре на своём чудо-инструменте. Жизнь его, казалось бы, складывается счастливо. У него в доме бывают Равель, Гершвин, Рахманинов, миллионеры-меценаты Дюпон, Форд, Рокфеллер. Он музицирует с Эйнштейном: тот – на скрипке, Термен – на терменвоксе. К нему обращаются за консультациями по многим техническим вопросам. По просьбе Эйнштейна он налаживает трансконтинентальную телефонную связь США – СССР. На празднествах в Центральном парке Нью-Йорка его просят сделать какой-нибудь уникальный трюк – и Термен с помощью магнитного поля заставляет повисать в воздухе разные предметы. Термен включён в список самых знаменитых людей мира.

Виолончель Термена. Играет изобретатель.

ДЕЛА СЕРДЕЧНЫЕ

Первый раз Лев Сергеевич женился ещё в Ленинграде, на медичке Кате Константиновой. Она ездила с ним на гастроли в Париж, Лондон, Берлин, приехала и в Америку. Работа для неё нашлась лишь в 50 км от Нью-Йорка, и встречались супруги только по выходным. Однажды к Термену пришёл молодой человек и попросил Льва Сергеевича о разводе – оказывается, у него с Катей уже несколько месяцев продолжается роман. Супруги расстались.



Ритмикон – первая ритм-машина, то есть прибор для создания периодических ударных фрагментов.

Но и у Термена был свой американский роман с русской эмигранткой, скрипачкой Кларой Рейзенберг. Она стала его любимой ученицей и истинным виртуозом игры на терменвоксе. Термен был пылким поклонником: он поразил Клару, подарив на её 18-летие механический торт, который вращался вокруг своей оси и был украшен сверху свечой, зажигающейся при приближении к торту. Много лет спустя Клара вспоминала, как они со Львом посещали знаменитые танцзалы, и очень часто на них направляли огни, а публика прекращала танцевать и аплодировала им, принимая за профессионалов. Роман длился несколько лет, но в 1933 г. Клара вышла замуж за адвоката Роберта Рокмора.

Спустя примерно три года Лев Сергеевич женился на чернокожей танцовщице Лавинии Вильямс. Специально для неё он создал новый музыкальный инструмент – «терпситон» (в этом названии и Терпсихора – муза танца, и Термен). Металлический лист, постеленный на полу, использовался как антенна. Музыка создавалась непосредственно в танце и следовала за каждым, даже самым незначительным, движением балерины. На терпситоне танцевала и великая Айседора Дункан.

Лев Термен
и Клара Рейзенберг

Лавиния Вильямс

КРУТОЙ МАРШРУТ

Неожиданно всему этому наступает конец. В 1938 году Термена вызывают в Москву, и он тайно покидает Америку на борту советского парохода в должности помощника капитана. Лавинии сказали, что муж вернётся через две-три недели. Термену же обещали, что его жена прибудет в Союз на следующем пароходе. Больше они друг друга не видели.

Из Москвы Термена, как и многих вызванных в то время из-за рубежа разведчиков, по ложному обвинению отправили прямиком в лагерь на Колыму. Во всех западных музыкальных энциклопедиях 1938 год значился как год смерти Льва Сергеевича. Он бы и погиб в сибирских каменоломнях, не выручи его опять изобретательская смекалка. Он придумал особые рельсы для своей тачки, и его бригада стала перевыполнять норму в несколько раз. Кроме того, Термен создал в лагере симфонический оркестр. Депеша о необыкновенном заключённом, отосланная начальством лагеря в Москву, дошла до советского правительства, и Термена перевели в лагерь («шарашку»), где заключённые-инженеры работали по специальности. Вместе с Терменом в этом лагере находились знаменитый авиаконструктор А. Н. Туполев и будущий конструктор космических кораблей Сергей Королёв (он был лаборантом Термена).

Окончание следует.

В 1930 – 50-х годах в бассейне реки Колыма на Дальнем Востоке шла масштабная добыча золота, в основном трудом заключённых.

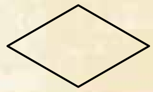
Максим Прасолов

Разрезания шестиугольника на бантики

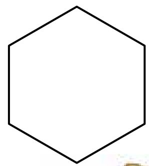
Может ли серьёзная математическая теорема походить на игру в кубики? Давайте проверим!

В формулировке любой теоремы используются математические объекты, которым необходимо дать определение. Иначе никто не поймёт, о чём вообще теорема! Итак,

Определение. Фигуру, составленную из двух одинаковых правильных треугольников, которые прилегают по стороне, назовём бантиком:



Из бантиков мы будем складывать правильные шестиугольники:



Например, так:

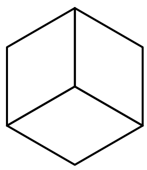


Рис. 1

Или так:

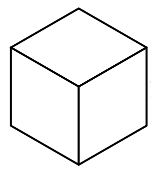
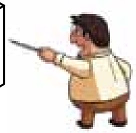


Рис. 2



Вот и представьте, что большой-большой правильный шестиугольник разбит на много одинаковых бантиков.

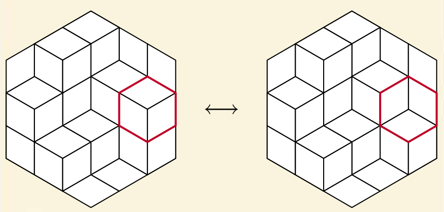
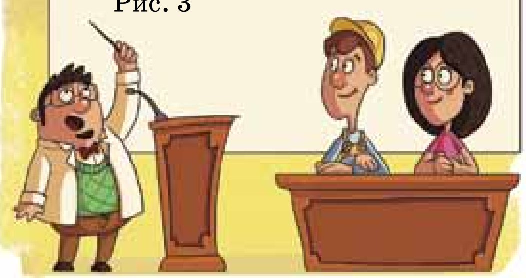


Рис. 3



Определение. Пусть какие-то три бантика в разбиении правильного шестиугольника образуют маленький шестиугольник, как на рисунке 1 или 2. Будем говорить, что мы сделали *флип*, если мы поменяли расположение этих трёх бантиков внутри маленького шестиугольника, как на рисунке 3. Сделав флип, мы получаем новое, немного другое разбиение.

Итак, у нас есть понятия *бантик* и *флип*. Теперь мы готовы сформулировать теорему:

Теорема. Пусть есть два разбиения правильного шестиугольника на равное количество одинаковых бантиков. Тогда из одного разбиения можно получить другое, сделав несколько флипов.

Разбиений бесконечно много и они могут быть очень сложными. Это делает теорему довольно устрашающей.

Тут приходит на помощь такая идея: разбиение на бантики – это комната, в которой лежат кубики (рис. 4). На рисунке 4 изображено то же самое разбиение на бантики, что и на рисунке 3 слева. Грани кубиков – это бантики.

Дальше – лучше! Уберём один кубик из комнаты (рис. 5). Что произойдёт с разбиением в этом случае? Конечно, флип! А если добавить кубик? Тоже флип.

Итак, доказательство теоремы могло бы выглядеть как-то так. Двум разбиениям из условия соответствуют два расположения кубиков в одной и той же комнате. (Количество кубиков в этих расположениях может быть не одинаковым.) По очереди будем убирать кубики первого расположения, пока не получим пустую комнату (рис. 6). Потом по одному добавим кубики второго расположения (рис. 6). При этом наше разбиение на бантики будет претерпевать флипы, и теорема доказана.

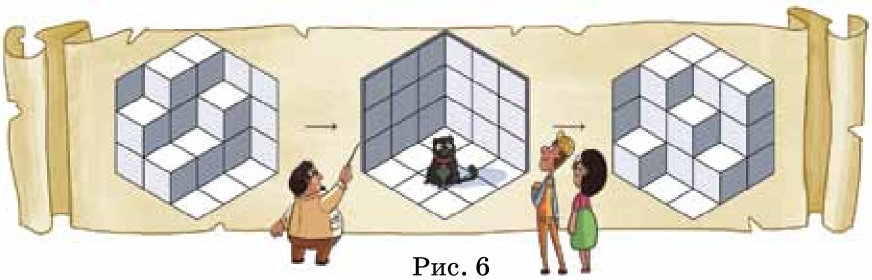


Рис. 6

Конечно, это не строгое доказательство[1]. Нужно ещё показать, что действительно каждое разбиение на бантики получается из некоторого расположения кубиков в комнате. Также кубики не могут лежать в комнате как попало – может не получиться разбиение на бантики. Например, если в комнате один кубик, он должен лежать в углу. Нарисуйте, какое разбиение на бантики получится. И выкидывать кубики из комнаты нельзя в случайном порядке. Нужно всегда вынимать «крайний» кубик, чтобы всегда получалось разбиение на бантики.

Задача. Пусть даны два разрезания правильного шестиугольника со стороной N на бантики со стороной 1. Сколько флипов максимум нужно сделать, чтобы из одного разрезания получить другое?

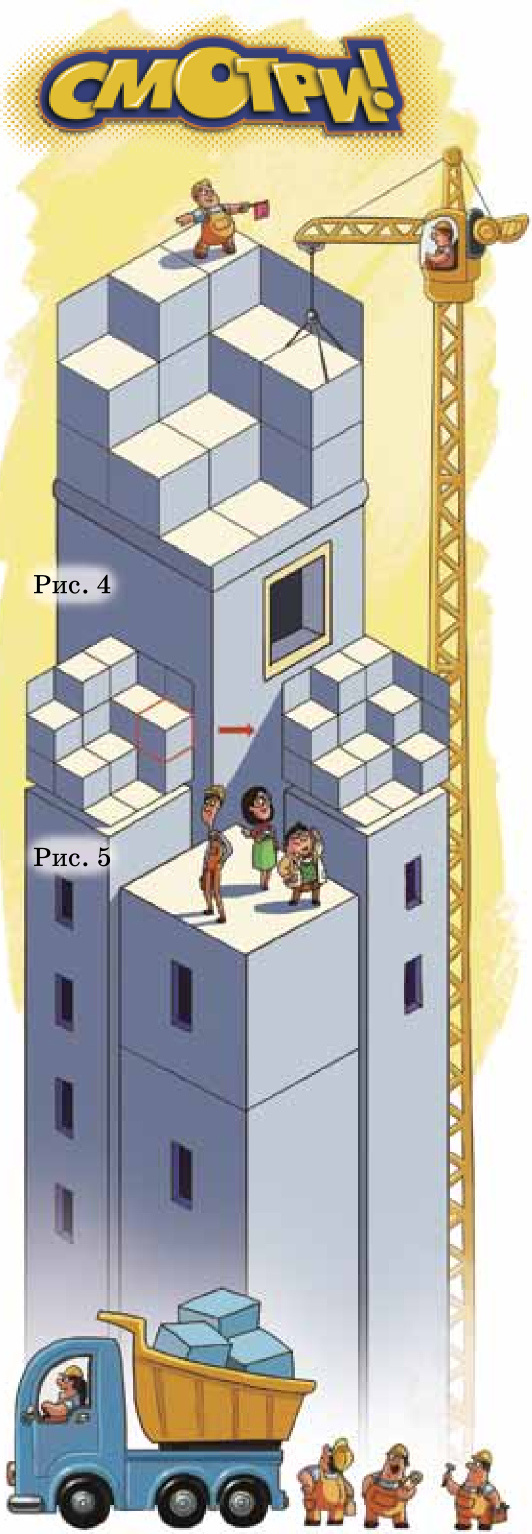


Рис. 4

Рис. 5

[1]Полное доказательство смотрите в статье Е. Карпова и К. Кохася «Разбиение на домино и функция высоты» («Квант» №6, 2010).

Художник Анна Горлач

Лесные пожары в тридевятом царстве

Иван Кобиляков

Окончание. Начало в №2

Но не сразу пошёл Иванушка дальше – заметил он цветочки аленькие, высокие, какие в деревнях собирают, чтобы чай заваривать. Иван-чай цветочки те называются, или кипрей по-другому. Нарвал их Иванушка-дурачок и в карман положил. Собрал ещё малины горсть, которая тут же, рядом росла. Ворона малиной угостил.

Быстро сказка сказывается, да не скоро дело делается. Долго Иванушка брёл вслед за вороном. Через коряги перепрыгивая, продираясь через кусты да сучья, всю одёжку изодрал. Вдруг со всех сторон обступили Иванушку-дурачка девицы-красавицы, стройные да кудрявые, одна другой краше.

– Кар-кар, – прокричал сверху ворон, – открой глаза пошире, Иванушка, то не девицы-красавицы, а деревца молодые. Берёзки да осинки.

– Что же мне тут бурить, ворон? Неужто берёзку или осинку молодую проткнуть придётся?

Но ворон уже нашёл единственную на всю округу сосну. Большую и старую.

– Сосну бури, Иванушка. Старше она, чем осинки да берёзки. Больше помнит.

Взял керн Иванушка и у этой сосны.

***

Остались позади берёзки-красавицы. Дальше пошёл Иванушка-дурачок вслед за вороном.

Поменялся лес. Сначала редки были сосенки, пышными кронами возвышавшиеся над зелёным морем осин да берёзок, а потом вдруг стало их много-много! В сосновый лес забрался Иванушка. Достал он из самой стройной да самой высокой сосенки керн и на ворона смотрит.

– Ворон, далеко ли ещё до Горыныча? А может быть, обманул ты меня? Вот погоди, я в тебя шишкой запущу!

– Кар-кар! Не бранись на меня, Иванушка! Совсем скоро уже на месте будем. Видишь, лес всё гуще становится? Всё больше в нём деревьев старых, коряг да пней? Старый это лес. Не горел никогда. Скоро придём!

Вдруг откуда ни возьмись, появилась избушка на курьих ножках. Окна запотели. Дымок из трубы идёт. Как увидел ворон избушку, так сразу испугался и улетел. А Иванушка-дурачок в калитку вошёл и в дверь избушки громко постучал.

– Чай, не заперто! Войдите! – раздался хриплый голос из избушки.

Вошёл Иванушка внутрь. Видит – старичок и старушка чай с пряником пьют.

– Присаживайся, добрый молодец! За какой нуждой ты к нам пожаловал? – спросила старушка Иванушку-дурачка.

Старичок ничего не сказал.

– Я по делам государственной важности. Пришёл леса от пожаров спасти. Змея Горыныча вот ищу, чтобы в темницу его отвести. А Василиса Премудрая вам случайно не внучка?

– Да, внучка. А я – бабушка Яга.

– Яга? Ну надо же!

– А что тут удивительного?

– Расскажите мне, пожалуйста, как по колечкам древесных кернов определить, когда пожар был? Без этого мне никак

вину Змея Горыныча не доказать. Подумает царь, что это я его лес поджёг и в темницу меня посадит.

– Ну, слушай, Иванушка, это дело не хитрое. Когда в лесу случается пожар и дерево выживает, на нём остаётся рубец. Спустя годы рубец затягивается. Не знаю, рассказывала ли тебе Василиса про то, что каждый год у деревьев образуется одно колечко?

– Да, рассказывала, – кивнул головой Иванушка.

– Обычное колечко, которое образуется за год без пожара, состоит из светлой ранней древесины и тёмной поздней. А вот колечко того года, когда был пожар, выглядит совершенно по-особенному. Оно полностью тёмное. Дерево навсегда запоминает пожары, которые были в лесу. Как будто бы пишет летопись. Давай-ка посмотрим на керны, которые ты принёс.

Иванушка достал из-за пазухи тоненькие деревянные керны и разложил их перед бабушкой Василисы.

– Сосна, из которой ты свой первый керн достал, одна в поле стояла?

– Да, бабушка Яга, одна.

– Значит, только она одна после пожара выжила. Если колечки посчитать, то между корой и чёрным колечком, которое после пожара осталось, всего 5 здоровых колец помещается. 5 колечек – это 5 лет. Недавно пожар был. А не было ли там высокой травы с алыми цветами?

– Как же, была! Иван-чай называется. У нас её в деревне собирают, чтобы чай заваривать. Вот, возьмите. Может, и вам пригодится, – Иванушка достал из-за пазухи горсточку кипрея и протянул Василисиной бабушке.

– Спасибо, Ванюша! Это ведь самое первое растение, которое на гарях появляется. Ещё там наверняка малина была. Съел малину-то? Не донёс? Ну а про хвощ лесной да осоку я не спрашиваю. Их ты совсем не приметил, видно. Всё это самые первые, если по науке – «пионерные» растения. Ну, давай посмотрим второй керн.

Посчитав колечки на втором керне, бабушка сказала:

– Ой, какие, Иванушка, там берёзки красивые были, а?

– И правда, были, бабушка. А вы откуда знаете? Никак бывали в тех местах? Или у вас блюдечко волшебное есть, в которое вы всё посмотреть можете?

– Нет, ни разу я там не была. И блюдечка у меня нет. Только вижу по керну, что со времени последнего пожара в том лесу прошло 40 лет. А значит, лес там

скорее всего берёзово-осиновый, густой, с кустами да травами высокими. Так чаще всего в природе бывает после того, как Горыныч всё дотла сожжёт. Вслед за травами да кустарниками на пожарищах лиственные породы начинают расти. Ну что там у тебя ещё? Сосновый лес остался?

Иванушка-дурачок протянул бабушке третий керн.

– В сосновом лесу часто бывают низовые пожары. Они сжигают валежник и ранят деревья. Но лес продолжает расти дальше. Видишь, как тёмные колечки на последнем керне часто повторяются? Пожар – не всегда плохо. Иногда он очень нужен, чтобы лес снова стал молодым и здоровым.

– Раньше я за этим присматривал, – подал голос дедушка, дожевав пряник. – Змей Горыныч не смел и близко к нашему царству-государству подлетать! Я в лесу валежник разбирал, за деревьями больными ухаживал. А если вдруг Горыныч прилетал, то я народ звал и всем миром мы его прогоняли. Теперь на пенсии вот... Царь-батюшка сказал, не нужен я больше... Ни один из нас, богатырей-лесников, не нужен.

Грустно стало в избушке. Даже Баба Яга погрустнела.

– Вы очень нужны – взволновался Иванушка-дурачок. – Мне нужны! Государству нужны. Царю-батюшке тоже! Царь это сразу понял, как его любимый лес около дворца сгорел. Как я без вас Горыныча поймаю да в темницу посажу? Пойдёмте, пожалуйста, со мною!

– Ой, не знаю, Ванюша, мы, лесники, теперь дома сидим да чай пьём с пряниками. Но раз царь-батюшка на службу зовёт, то пойдём.

С этими словами старичок встал из-за стола и вдруг стал большим-пребольшим. Плечи у него широкие, голова в потолок упирается. Морщины у старичка разгладились, щёки порозовели, глаза засияли. И узнал Иванушка-дурачок богатыря древнерусского, Добрыню Никитича.

Вместе с Добрыней Никитичем забрался Иванушка в самую чащу леса и изловил Змея Горыныча. Горыныч даже опомниться не успел, как его во дворец привели. Все улики против него!

Ну а что дальше было – о том все люди знают. Царь Иванушку-дурачка помиловал. Змея в тюрьму посадил. А когда узнал, что Иванушке Добрыня Никитич помогал, то сразу всех богатырей-лесников обратно на службу взял. С тех пор лесных пожаров в том царстве-государстве не было.

Художник Виктор Пяткин

Предельный случай

Григорий Фельдман

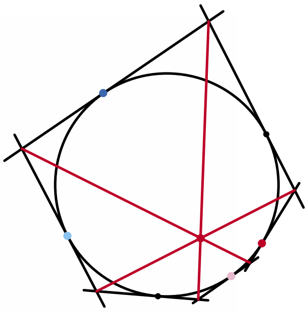


Рис. 1

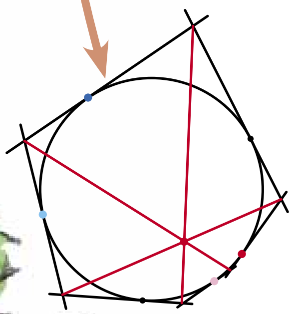


Рис. 2

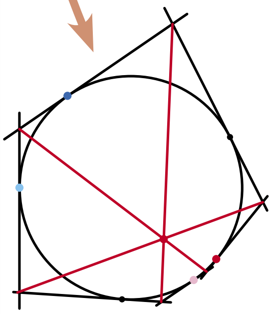
Знакомясь с некоторыми математическими теоремами, поражаешься: как можно было такое придумать?! Сейчас мы увидим, как иногда, глядя на красивую теорему, удаётся выдвинуть новую гипотезу.

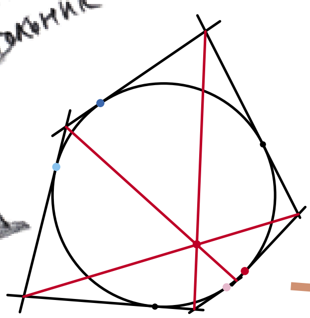
Теорема (Шарль Брианшон, 1810 год). *В описанном шестиугольнике три главные диагонали пересекаются в одной точке* (*рис. 1*).

Разберёмся в формулировке. Шестиугольник называется описанным вокруг окружности, если каждая его сторона касается этой окружности (каждая в свой точке касания). Главными диагоналями называются диагонали, соединяющие противоположные вершины.

Проведём эксперимент. Описанный шестиугольник получен из шести прямых, касающихся окружности. Начнём вращать две соседние прямые, оставляя их касательными к окружности и сближая их точки касания (синяя и голубая точки на рисунке 2). Аналогично поступим ещё с одной парой соседних прямых (сближаем красную и розовую точки касания на рисунке 2). Шестиугольник при этом остаётся описанным, так что всё время выполняется теорема Брианшона: красные отрезки пересекаются в одной точке.

Оп! Внезапно у нас получился четырёхугольник. В каком-то смысле это шестиугольник, только, как говорят математики, *вырожденный*. Наверняка и в нём красные отрезки буду пересекаться в одной точке. Можно выдвинуть красивую правдоподобную гипотезу:





Гипотеза 1. *В описанном четырёхугольнике отрезок, соединяющий две точки касания вписанной окружности, лежащие на противоположных сторонах, проходит через точку пересечения диагоналей* (*рис. 3*).

А теперь сделаем ещё более красивую гипотезу из уже имеющейся. Соединим отрезками точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами четырёхугольника. По предыдущей гипотезе, оба эти отрезка пройдут через точку пересечения диагоналей!

Гипотеза 2. *В описанном четырёхугольнике точка пересечения отрезков, соединяющих противоположные точки касания вписанной окружности, совпадает с точкой пересечения диагоналей* (*рис. 4*).

Оказывается, обе гипотезы верны. Основную идею их доказательства мы увидели: надо рассмотреть вырожденный случай теоремы Брианшона. Этот приём математики называют *предельным переходом*. Для наведения полной строгости нужно было бы показать, что:

во-первых, при переходе от шестиугольника к четырёхугольнику в последний момент отрезки не перестают пересекаться в одной точке;

во-вторых, любой четырёхугольник получается из некоторого шестиугольника с помощью предельного перехода.

Понравилось выдвигать гипотезы? Попробуйте сами рассмотреть другие вырождения шестиугольника – в пятиугольник, в треугольник, – и с помощью теоремы Брианшона посмотреть, что получается. В ответах на стр. 30 приведены результаты, известные нам. Может быть, вам удастся открыть что-то новое?

Рис. 4

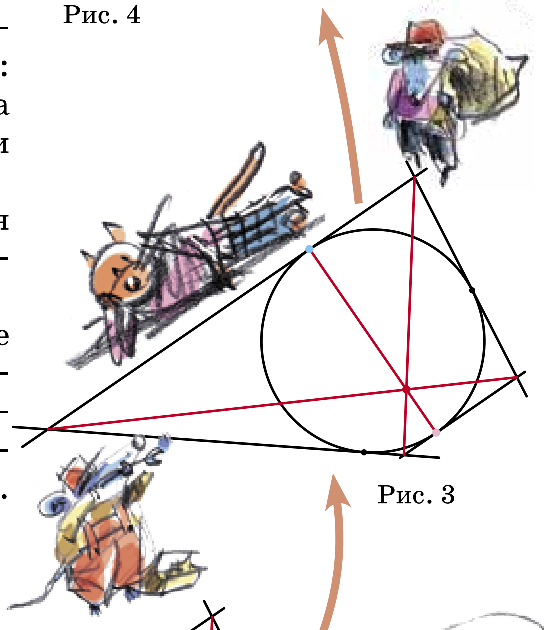


Рис. 3

Художник Сергей Чуб

Александр Шаповалов

ПЕРЕПРАВЫ от Шаповаловых

Все знают задачу про перевозку волка, козы и капусты. В первый раз она производит большое впечатление. Ведь казалось, что невозможно, и вдруг – вот способ! И всё так наглядно: можно взять фигурки и подвигать их, а то и поиграть: ты будешь козой, ты волком, ты крестьянином...

Подборки задач на переправу пользуются популярностью. Но вот список сюжетов в них очень небольшой: два мальчика и полк солдат, рыцари и оруженосцы (или дамы сердца), миссионеры и каннибалы (или купцы и разбойники), переход через мост с фонариком. Для каждого сюжета есть 2–3 задачи. Мало!

Тогда я решил придумать сам. С первой задачей помог сын, вспомнив, как мы переезжали на новую квартиру и грузчиков не хватало. Оказалось, что в такие задачи можно «зашить» математику и посерьёзнее. Порешайте и убедитесь в этом сами. Только давайте сразу договоримся: никаких нематематических трюков с впрыгиванием из лодки, которая не пристала к берегу. А лодку, приставшую к берегу, будем считать частью этого берега.

1. Три человека со стиральной машиной хотят переправиться через реку. Катер вмещает либо двух человек и стиральную машину, либо трёх человек. Беда в том, что стиральная машина тяжёлая, поэтому погрузить её в катер или вытащить из него можно только втроём. Смогут ли они переправиться?

2. Три жулика, каждый с двумя чемоданами, находятся на одном берегу реки, через которую они хотят переправиться. Есть трёхместная лодка, каждое место в ней может быть занято либо человеком, либо чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в своё отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться?

3. а) Две семьи (в каждой папа, мама и дочь) хотят переправиться через реку. Есть двухместная

лодка. Грести могут только мужчины. Дочери могут быть на берегу или в лодке только вместе с кем-нибудь из своих родителей. Как им всем переправиться на другой берег?

б) То же, но, кроме того, никакую из женщин нельзя оставлять на берегу одну.

4. Две семьи (в каждой муж, жена и сын) хотят переправиться через реку. Есть двухместная лодка. Грести может всего один человек – один из мужей. Сыновья могут быть на берегу только вместе с кем-нибудь из взрослых. Женщины боятся быть на берегу, если там нет лиц мужского пола. Как им всем переправиться на другой берег?

5. К переправе подошли царевна Соня и строй из 7 богатырей. Лодка одна, в ней могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Каждый согласен плыть только вдвоём с другом или втроём с двумя друзьями. Какое наибольшее число из них сможет переправиться, если каждые двое рядом стоящих богатырей – друзья, Соня дружит с ними всеми, кроме среднего из богатырей, а все остальные пары не дружат?

6. Три вора – Камнев, Ножницын и Бумагин, каждый с несколькими баулами, – хотят переправиться через реку. Известно, что Камнев обворует любой баул Ножницына, если баул останется без присмотра коголибо из остальных. Так же Ножницын обворует баул Бумагина, а Бумагин – баул Камнева. Есть трёхместная лодка, место занимает человек или баул. Грести может только Камнев. Как им всем переправиться и перевезти баулы, чтобы никто никого не обворовал? (На пустынном берегу баулы в безопасности).

7. К переправе подошли Дон Кихот и Санчо Панса с жёнами, а также несколько монахинь. Есть двухместная лодка, грести могут только Санчо и его жена. Никто из женщин не желает оказаться на берегу в одиночестве. Правила этикета запрещают женщинам быть в лодке или на берегу с другими мужчинами, если рядом нет мужа или другой женщины. При каком числе монахинь все они смогут переправиться? (Несколько – это больше одной).

8. Председатель жюри на своей машине хочет за три рейса перевезти 9 членов жюри с вокзала в лагерь, где проходит турнир. В машине 4 места для пассажиров, дорога в один конец занимает полчаса. Если в любом месте (в лагере, в машине или на вокзале) оказывается группа из двух, трёх или четырёх человек, она за полчаса придумывает, соответственно, 3, 4 или 5 задач. Группы другого размера неработоспособны (не придумывают ничего), председатель за рулём входит в группу в машине, но если пассажиров четверо, то он им придумывать не мешает. Какое наибольшее число задач может быть придумано жюри и председателем за эти 2,5 часа? (Большие группы, находящиеся в одном месте, на части делить нельзя, больше членов жюри нет).

9. Трём братьям надо перевезти с одной квартиры на другую рояль весом 250 кг, диван весом 100 кг и более 100 коробок по 50 кг. Был нанят небольшой фургон с шофёром на 5 рейсов туда (и 4 обратно), который может за раз перевезти 500 кг груза и одного пассажира. Погрузить или выгрузить диван братья могут вдвоём, рояль – втроём, с коробками любой из братьев справляется в одиночку. Надо перевезти всю мебель и как можно больше коробок. Какое наибольшее число коробок удастся перевезти? (Шофёр не грузит, другого транспорта и помощников нет, пассажиров вместо груза везти нельзя).

10. Телепорт может менять между собой только равные массы. В две кабины телепорта – одна на Земле, другая на Сатурне – зашли для обмена суммарно 10 пассажиров с разных планет. Оказалось, что в каждой кабине суммарная масса людей одна и та же, но из-за магнитной бури обмен «все на все» оказался невозможен. Временно можно за раз обменять только одного пассажира с Сатурна на двоих с Земли. Оператор последовательно сделал несколько таких обменов, каждый раз меняя равные массы. При этом пассажиры терпеливо ждали, не расходились, путешествовали туда и обратно. Какое наибольшее число обменов могло случиться?

Пополняемая подборка задач на переправы
www.ashap.info/Zadachi/Perepravy-m.html

Художник Ольга Демидова

Сонная лунята

Сергей Федин

Нас с детства все поучают: мой руки перед едой, учи таблицу умножения, не плюй в колодец и так далее. Ну а когда речь заходит о языке, тут и вовсе сплошные ужасы: *жи*, *ши* пиши через *и*, проверяй ударения, заглядывай в словари, не путай окончания и ещё миллион правил. А мне вот кажется, что, наоборот, от такого чересчур уважительного отношения к словам наша речь становится слишком скучной и бесцветной. Поэтому иногда так хочется похулиганить, поиграть с языком, показать ему язык, что-нибудь нарочно перепутать. А уж за ним дело не станет – ведь творчество, особенно словесное, это всегда нарушение инструкций.

Вот и давай сегодня поиграем в смешалости, нарочно перепутывая слова, чтобы, например, вместо «бутерброд с колбасой» получалось *колбасод с бутерброй*, а вместо «сорок копеек» – *корок сопеек*.

Смысл понятен, а звучит гораздо смешнее и интереснее. И, главное, слова получаются какие-то вкусные, незатёртые. Такие перепутаницы очень любят чуткие к слову писатели и поэты. Один из самых известных примеров ты, конечно, помнишь, – его придумал Самуил Маршак в знаменитом «рассеянном» стихотворении:

Глубокоуважаемый
Вагоноуважатый!
Вагоноуважаемый
Глубокоуважатый!
Во что бы то ни стало
Мне надо выходить –
Нельзя ли у трамвала
Вокзай остановить.

А популярный писатель Макс Фрай вспоминал однажды, что в детстве часто вот так вот перепутывал слова и, например, просил родителей «*сосить сварицку*» (то есть сварить сосиску) или «*калить нампот*» (т.е. налить компот).

Да что там писатели! Не реже путают слова и герои фильмов. Скажем, в любимом многими «новогоднем» фильме «Ирония судьбы, или С лёгким паром!» один из его героев, придя с мороза, заплетающимся языком как бы случайно оговаривается: «Нашлись добрые люди – *подогрели, обобрали*, то есть подобрали, обогрели».

А вот в другом замечательном фильме, «Амели», маленькая девочка, старательно повторяя по памяти написанную на доске фразу «Несушки, в сущности, пустые существа», смешно ошибается: «Несушки, в сущности, *сущие пущества*».

Обрати внимание, что все эти перепутаницы (кстати, их научное название – *метатезы*) устроены примерно одинаково – два слова просто обмениваются своими начальными частями. Скажем, берём слова «варёная сгущёнка», переставляем им «головы» и получаем «*сгущёная варёнка*».

Ты и сам сможешь придумывать свои перепутаницы, и, кто знает, может быть, некоторые из них со временем станут народными. Я думаю, что именно дворовые ребята, такие же мальчишки и девчонки как ты и твои друзья, придумали когда-то давно вот эту чудесную потешку:

Челодой моловек! Не камняйтесь бросами!
А то режиком заножу, будешь дрыжками ногать!

Но, наверное, самая древняя заплетушка из известных на русском языке именно вот эта, которой уже лет двести:

«*Императрина Екатерица заключила перетурие с мирками*».

Некоторые симпатичные перепутаницы получаются случайно, от усталости, когда *заплетык языкается*, или в результате оговорки. Недавно я слышал историю про одного молодого актёра, который, придя в антракте в общую гримёрку (то есть гримерную комнату), не нашёл на своем столе любимую жвачку, оставленную полчаса назад. «Здесь моя *лежачка жевала*!» – жутким голосом закричал он, гневно озираясь вокруг. У похитителя, который с невинным видом стоял неподалёку, от изумления буквально отвисла челюсть, и злополучная жвачка вывалилась на пол, изобличая злодея.

Я тоже однажды «отличился», диктуя ученице домашнее задание, задумался о чём-то постороннем и вместо «запиши на дом» брякнул: *Напиши задом!* Хорошо, что она ничего не заметила. Наверное, тоже о чём-то задумалась...

Но такие счастливые оговорки в жизни человека случаются крайне редко. Был, однако, такой чудак, которого можно смело назвать чемпионом по перепутаницам. Я имею в виду Вильяма Спунера, жившего в Англии лет сто назад преподавателя Оксфордского университета. Этот рассеянный профессор богословия часто путал слова, прославившись своими оговорками (с той поры их часто называют *спунеризмами*) на весь мир. Например, слушая печальную песню, он мог вместо «What a sad ballad!» (Какая грустная баллада!) задумчиво пробормотать «What a *bad salad*!» (Какой плохой салат!). А однажды, отчитывая студента-прогульщика, он вместо «You have wasted two terms!» (Вы пропустили два семестра!) возмущённо проскрипел «You have *tasted two worms*!» (Вы попробовали двух червяков!).

Однако после всей этой словесной неразберихи у меня самого уже *пуквы бутаются* 🙂. Пора и тебе помучиться. Попробуй-ка расплести эти перепутаницы и перевести их на нормальный русский язык:

сардельная вкуська, в кузне травел сидечик, перепонные барабанки, кислая сернота, мыт и коши, голому повыть, сонная луната, лень Путина, так настрадал Предсказамус.

Кстати, хорошая игра получается. Один придумывает такие уборные заботы, тьфу ты, я хотел сказать – забавные обороты, а другой их разгадывает. Попробуй! А напоследок реши-ка эту хитрую задачку, герой которой разговаривает – куда там преподобному Спунеру! – с помощью одних только перепутаниц:

После того как Соловей-разбойник упал с дуба, он слегка повредился в рассудке, отчего его речь стала несколько туманной. Поэтому, встретив очередного богатыря, проезжающего мимо, он поприветствовал его такой загадочной фразой:

– Фу-фу, душистым русом пахнет... Ну, держальник, богатырись! Пришёл твой часовой послед! Сейчас от тебя местная мокрота останется!

Не шибко сообразительный богатырь не разобрался в смысле «приветствия» и на всякий случай угробил злодея молодецкой булавою. Правда, потом всю жизнь мучился, не ошибся ли он. Может быть, Соловей-разбойник и не имел в виду ничего дурного?

А ты как думаешь?

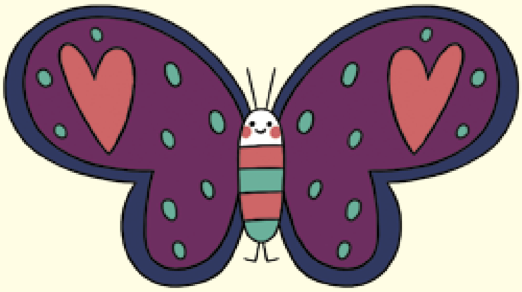
Художник Анастасия Мошина

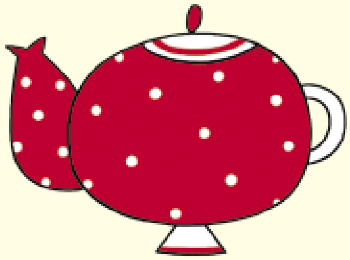
Наташа Рожковская

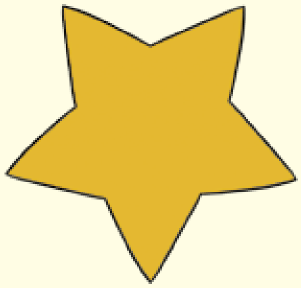
Симметрия

Окончание. Начало см. в № № 1, 2 за 2014 г.

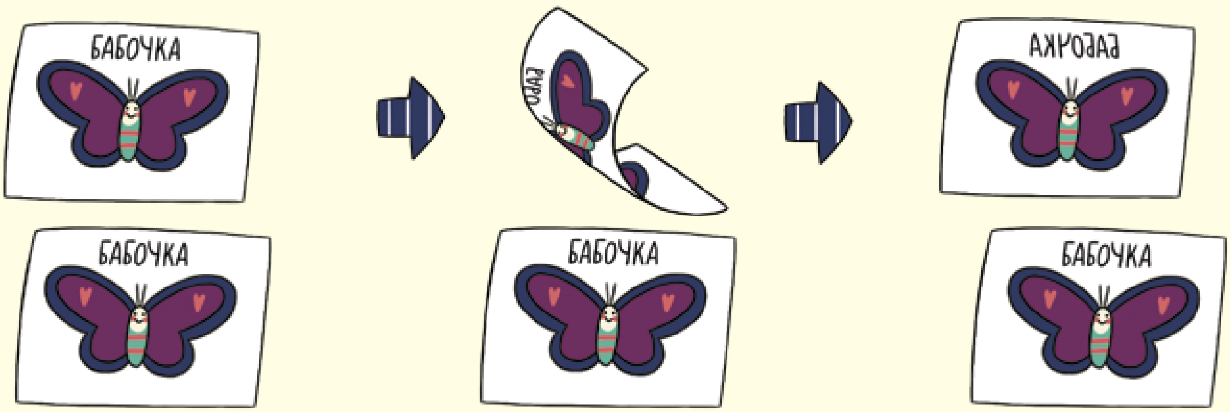
Мы заметили, что картинка в калейдоскопе симметрична. Но что означает это слово? Как мы определяем, что бабочка или звезда симметричны, а чайник – нет?



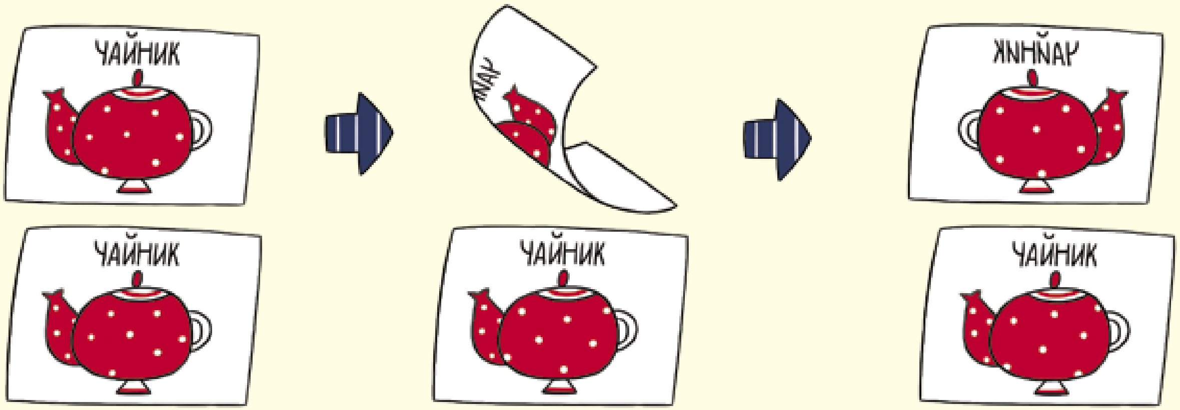




Представьте себе, например, что эта бабочка нарисована на листе бумаги и поверх неё лежит точно такая же бабочка, нарисованная на прозрачном листе:

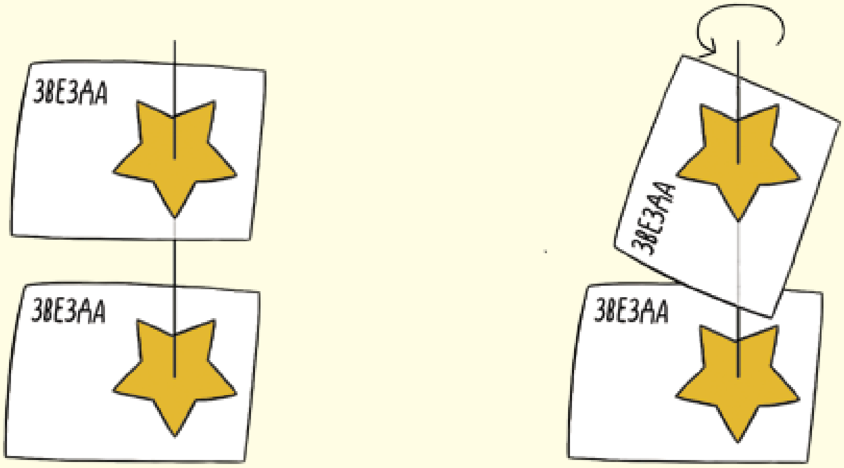


Перевернём прозрачный лист бумаги на другую сторону. Бабочку на прозрачном листе можно положить поверх бабочки на бумаге точно так же, как и раньше, – бабочки совпадут. Это соответствует тому факту, что у бабочки есть зеркальная симметрия. А что будет, если то же самое проделать с рисунком чайника?



После переворачивания прозрачного листа нам никак не удастся совместить чайники: их носики будут смотреть в разные стороны. У чайника нет зеркальной симметрии.

У звезды, конечно, тоже есть зеркальная симметрия, но это ещё не всё. Можно повернуть прозрачный лист вокруг центра звезды так, что повернутый рисунок звезды можно опять в точности наложить на исходный. У звезды есть симметрия относительно поворотов:



Приведённые выше мысленные опыты с бабочкой и звездой можно описать так. В каждом опыте мы сделали какое-то преобразование плоскости (прозрачного листа бумаги). Это был или поворот – когда мы повернули всю плоскость на какой-то угол – или отражение – когда мы «перевернули» плоскость «на другую сторону». При этих преобразованиях рисунок на плоскости остался неизменным. Это и означает, что он обладает симметрией. Бывают и другие виды симметрии, но здесь мы не будем их обсуждать.

Задание 9.

У каких картинок есть зеркальная симметрия? У каких картинок есть симметрия относительно поворотов?

Художник Наталья Гаврилова

Русский медвежонок

Мы уже писали о конкурсе «Русский медвежонок – языкознание для всех» («Квантик» № 11 за 2013 год). Перед вами – небольшая подборка задач, в которых переплелись русский язык и капелька математики. Впрочем, для их решения не нужно почти ничего, кроме здравого смысла. Попробуйте!

Задача 1 (*автор Л.Л. Фёдорова*).

В сказке «Конёк-Горбунок» Иванушка просит у царя в обмен на коней «*два-пять шапок серебра*». Сколько это?

(А) От двух до пяти, сколько дадут; (Б) двадцать пять; (В) семь; (Г) две с половиной; (Д) десять.

Задача 2 (*автор И.С. Рубанов*).

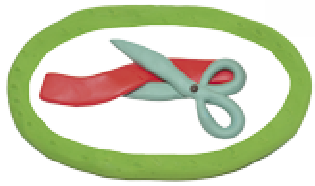
В «Записках старого петербуржца» Льва Успенского упоминается магазин «Удивительно всё дёшево», где каждая вещь стоила ровно полтинник. «По правде сказать, не стоила она и четвертака», – писал Успенский. Во сколько же раз, по мнению писателя, хозяин магазина завышал цены?

(А) Менее чем в два; (Б) в два; (В) более чем в два; (Г) по крайней мере, в три; (Д) более чем в четыре.

Задача 3 (*автор К.А. Кноп*).

Полтора раза – это:

(А) числительное + существительное;
(Б) два числительных;
(В) два существительных;
(Г) существительное + числительное;
(Д) наречное выражение.



Задача 4 (*автор И.Б. Иткин*).

В рассказе А.П. Чехова «Детвора» дети играют в лото. Некоторые числа, встречающиеся в игре, имеют специальные образные названия: «кочерга», «палочки», «Семён Семёныч», «дедушка». Выберите вариант, где эти числа приведены в том же порядке, в котором идут их названия.

(А) 2, 10, 7, 9; (Б) 7, 11, 77, 90; (В) 7, 11, 17, 99; (Г) 2, 77, 17, 90; (Д) 2, 77, 7, 99.

Художник Ольга Московка

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 1 за 2014 год)

1. *В клетке было 7 верблюдов и работник зоопарка Вениамин. Каждый верблюд плюнул 3 раза иполучил 2 плевка от товарищей. Сколько плевков получил Вениамин? (Верблюды не промахиваются и выбирают цель для плевка только внутри клетки. Вениамин не плюётся.)*

Ответ: Всего плевков было $7 \cdot 3 = 21$, причём из них $2 \cdot 7 = 14$ получили сами верблюды. Значит, оставшиеся 7 получил Вениамин.

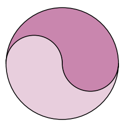
2. *Однажды я жарил оладьи. Когда я начал переворачивать одну из них, она никак не входила на старое место. Оладьи удалось вновь разместить на сковороде, лишь перевернув их все.*

а) *Докажите, что всегда можно уложить перевернутые оладьи на круглой сковороде, на которой они лежали раньше.*

б) *Приведите пример, в котором нельзя ни одну из оладий, перевернув, уложить на старое место.*

Ответы: а) Перевернём сковороду вверх дном. Оладьи начнут падать, а мы их подхватим сковородой. Они все окажутся перевёрнутыми и умещёнными на сковороде.

б) Пусть две оладьи занимают вместе сковородку целиком и имеют несимметричную форму (например, такую, как показано на рисунке). Тогда ни одну из оладий не удастся, перевернув, уместить на освободившемся месте.



3. *На физическом кружке учитель поставил такой эксперимент. Он разместил на чашечных весах 16 гирек массами 1, 2, 3, . . . , 16 граммов так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причём после выхода каждого ученика весы меняли своё положение (каждый раз перевешивала не та чаша весов, что в предыдущий раз). Какая гирька могла остаться на весах (укажите все возможности)?*

Ответ: могла остаться только гиря массой 1 г.

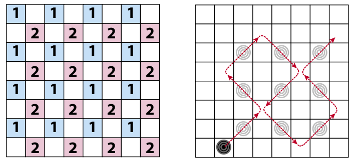
Пример привести нетрудно: пусть на левой чаше лежат гири массой 1, 3, ..., 13, 15 граммов, а на второй – гири массой 2, 4, ..., 14, 16 граммов. Тогда, забирая последовательно гири в 16, 15, 14, ..., 3, 2 грамма, ученики каждый раз будут изменять положение весов (докажите!).

Докажем, что никакая другая гиря в конце остаться не сможет.

Пусть кто-то из учеников забрал гирю массой 1 грамм. Прямо перед этим более тяжёлая чаша (А) перевешивала более лёгкую (Б) хотя бы на 1 грамм, потому что все массы гирь целые. Тогда, если забрать с чаши А гирю массой 1 грамм, она всё равно будет весить не меньше чаши Б, то есть Б не перевесит. Значит, гирю массой 1 грамм никто не снимал, поэтому именно она и должна остаться в конце.

4. *Какое наибольшее число белых шашек можно расставить на доске 8×8 так, чтобы поставленная в некоторую клетку чёрная шашка смогла побить их все за один ход?*

Ответ: 9 шашек.



Пусть для определённости шашки стоят на чёрных полях доски. Раскрасим чёрные поля в два новых цвета: 1-й и 2-й, как показано на рисунке сверху. Заметим, что шашка, побив другую, сохраняет цвет поля, на котором стоит, а значит, может бить только шашки, стоящие на полях другого цвета. Поэтому все белые шашки стоят либо на 1-м цвете, либо на 2-м (и того, и другого – по 16 полей). Также заметим, что белая шашка не может стоять на краю доски – там её никак не побить. Значит, из возможных 16 полей, где могут стоять белые шашки, исключаются ещё 7 полей на границе. То есть белых шашек не более $16 - 7 = 9$. Пример для 9 шашек изображён на рисунке сверху.

5. *Билет на проезд в общественном транспорте считается счастливым, если в его шестизначном номере сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр.*

Как-то между тремя приятелями состоялся такой разговор:

– Однажды мне попался счастливый билет, у которого каждая цифра начиная со второй была либо вдвое больше, либо вдвое меньше предыдущей, – заявил Петя.

– А мне, помню, достался счастливый билет, у которого каждая цифра начиная со второй была либо вдвое больше, либо втрое меньше предыдущей, – сообщил Коля.

– А у моего счастливого билета каждая цифра начиная со второй была либо вдвое больше, либо вчетверо меньше предыдущей, – сказал Вася.

Чьи слова могли быть правдой?

Ответ: Васины слова.

Мы считаем, что билета с номером 000000 не существует, иначе задача теряет свой интерес. Поэтому ни одна из цифр билета не должна быть равна 0.

Вася мог сказать правду, например, если у него был билет 124124.

Предположим, что Коля сказал правду: каждая цифра, начиная со второй, либо вдвое больше, либо втрое меньше.

Тогда, если первая цифра не делится на 3, то каждая следующая цифра должна быть вдвое больше предыдущей, и последняя цифра равна первой, умноженной на 32, но это явно больше 10.

Если первая цифра 3 или 6, то, идя к последней цифре (делаем 5 умножений на 2 или делений на 3), мы можем максимум один раз поделить на 3, но тогда последняя цифра будет не меньше чем $3/3 \cdot 16 = 16$, что опять же больше 10.

Если первая цифра 9, то следующая обязана равняться 3. Если третья цифра 1, то возможный билет только один: 931248, и он несчастливый. Если же третья цифра 6, то следующая только 2, а затем идут 4 и 8, но билет 936248 тоже несчастливый. Итак, Коля сказал неправду.

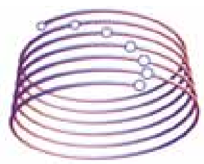
Предположим, что Петя сказал правду: каждая цифра, начиная со второй, либо вдвое больше, либо вдвое меньше. Посмотрим на остатки всех цифр при делении на 3.

Пусть первая цифра делится на 3 (то есть равна 3, 6 или 9). Таких билетов всего два: 363636, 636363, и ни один из них не счастливый.

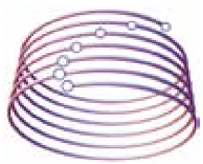
Пусть первая цифра не делится на 3, тогда и все последующие не смогут делиться на 3. Заметим, что в этом случае любые две соседних цифры дают разные остатки (1 и 2) при делении на 3 (возможных пар соседних цифр всего три: 1 и 2, 2 и 4, 4 и 8). Но тогда если сумма первых трёх цифр при делении на 3 даёт остаток $1+2+1$ (то есть 1), то вторая $2+1+2$ (то есть 2), и наоборот. Так как остатки разные, то суммы совпадать не могут, и билет заведомо несчастливый. Значит, Петя сказал неправду.

ГИРЛЯНДА («Квантик» № 2 за 2014 год)

Найдите часть дерева, где лампочки висят ровно друг над другом. Это значит, что в этом месте на обхвате дерева умещается целое число отрезков гирлянды между лампочками. Поднимемся чуть выше, где дерево тоньше. Обхват дерева уменьшился, поэтому новые лампочки окажутся не в точности над предыдущими, а чуть забегут вперёд, по направлению движения по гирлянде (см. рис.). То есть, куда вверху заворачивают вертикальные ряды ламп, туда и закручена гирлянда.



Левое дерево



Правое дерево

Будь в задаче не деревья, сужающиеся кверху, а цилиндрические столбы, лампочки бы висели симметрично, и так решить задачу было бы невозможно.

ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ

1.Ответ: по часовой стрелке.

2. Ответ: оставаться в прежнем состоянии.

Для удобства будем считать, что мы оба болта проворачиваем друг вокруг друга одновременно. На ответ это не повлияет, но сделает болты равнозначными.

Посмотрим на пару болтов не в том ракурсе, как на рисунке в статье, а с противоположной стороны – тогда мы увидим, что болты проворачиваются вокруг друг друга в противоположном направлении. Действительно, если посмотреть на них с разных боков, куда направлены оси болтов, то с одной стороны мы увидим, как болты проворачиваются друг вокруг друга по часовой стрелке, а с другой – против.

Это всё означает, что неважно, в какую сторону проворачивать болты вокруг друг друга – на ответ это не повлияет. А значит, они могут только оставаться в прежнем состоянии, не отдаляясь и не приближаясь друг к другу.

РАЗРЕЗАНИЯ ШЕСТИУГОЛЬНИКА НА БАНТИКИ

Ответ: всегда хватит N^3 флипов, а меньшего количества может не хватить.

Докажем сначала, что хватит $2N^3$ флипов. Двум разрезаниям соответствуют два расположения кубиков в комнате. Так как на стороне шестиугольника умещается N сторон бантиков, то в этой комнате лежит не больше $N \cdot N \cdot N = N^3$ кубиков в каждом из расположений. Воспользуемся пояснением к рисунку 6 статьи. Возьмём первое расположение кубиков в комнате. Будем убирать кубики по одному, пока не получим пустую комнату. А потом, добавляя по одному кубику, получим второе расположение. При этом мы убрали уж точно не больше N^3 кубиков и добавили тоже не больше N^3 кубиков. Так мы получим из первого разрезания второе, сделав не больше $2N^3$ флипов.

Но почему же хватит всего N^3 флипов? Заметим, что получить из первого расположения кубиков второе можно двумя способами. Первый способ вы уже знаете: сначала убираем кубики первого расположения, а потом добавляем кубики второго. Но есть и второй способ: сначала добавляем кубики к первому расположению, чтобы заполнить всю комнату, а потом убираем лишние кубики, чтобы получить второе расположение.

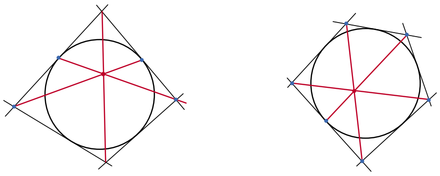
Суммарное число кубиков, которое мы переместим в этих двух способах, в точности равно $2N^3$. Почему? Так ведь в первом случае мы перемещаем столько кубиков, сколько суммарно есть в двух расположениях. А во втором способе перемещаем кубики, которых не хватает, чтобы дополнить оба расположения до полных комнат. То есть всего перемещаемых кубиков столько, сколько в двух полных комнатах – как раз $2N^3$. Но если два способа в сумме требуют $2N^3$ флипов, то хоть один из способов требует не больше половины флипов – как раз N^3.

А меньшего количества может и не хватить – если, например, надо получить из пустой комнаты полную.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Если шесть точек разбить на три пары соседних и совместить точки в одной паре, то получится треугольник, в который вписана окружность. Теорема Брианшона при этом превращается в теорему Жергона: отрезки, соединяющие вершины треугольника с противоположными точками касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке.

Ещё две теоремы изображены на рисунках, сформулируйте их самостоятельно.



ПЕРЕПРАВЫ ОТ ШАПОВАЛОВЫХ

Для краткости будем обозначать пассажиров в лодке буквами и цифрами, переправу с исходного берега на противоположный – стрелочкой вправо: →, а переправу в обратном направлении – стрелочкой влево: ←. Такой краткой записи полезно научиться.

1. Ответ: смогут.

Сначала переправляются два человека и стиральная машина, один человек остаётся на другой стороне реки, а второй (вместе со стиральной машиной) возвращается за третьим. Затем второй и третий переправляются вместе с машиной, и все втроём выгружают машину.

2. Ответ: смогут.

Обозначим жуликов большими буквами A, B, C, а их чемоданы – маленькими. Схематически переправу можно изобразить так:

Ccc→, C ←, CAB →, AB ←, Aaa →, AC ←, ABC →, B ←, Bbb →.

Сначала C перевозит свои чемоданы, затем без багажа возвращается обратно и перевозит A и B (без багажа). После этого A и B возвращаются, и A перевозит свои чемоданы. Наконец A и C возвращаются и перевозят B, который возвращается один за своими чемоданами.

3. Обозначим членов семей первыми буквами, в одной семье большими, в другой – малыми. Вот схемы переправ:

а) Пм →, П ←, пд →, п ←, пМ →, п ←, ПД →, П ←, Пп →;

б) Пп →, П ←, ПД →, п ←, пМ →, пП ←, Пм →, П ←, пд →, п ←, Пп →.

4. Обозначим членов семей первыми буквами, умеющего грести – большой буквой, остальных – малыми. Схема переправы такая:

Мм →, М ←, Мж →, М ←, Мс →, Мм ←, Мж →, М ←, Мс →, М ←, Мм →.

5. Ответ: все 8.

Обозначим царевну буквой Ц и пронумеруем богатырей от 1 до 7 по порядку (Соня не дружит с 4-м). Схема переправы:

Ц12→, Ц1 ←, 34 →, 23 ←, Ц56 →, Ц6 ←, Ц12 →, Ц2 ←, Ц23 →, Ц5 ←, Ц56 →, Ц6 ←, Ц67 →.

6. Заметим, что под охраной двух воров баулы в безопасности. Сначала Камнев перевозит на другой берег свои баулы (например, по одному). Затем Камнев сажает в лодку Ножницына и вместе с ним по одному перевозит баулы Ножницына. Высадив Ножницына с последним баулом на другой берег, Камнев возвращается, грузит Бумагина с баулом, везёт и выгружает их на тот берег. Последующими рейсами Камнев доставляет с исходного берега на другой баулы Бумагина.

7. Ответ: при $n \geqslant 4$.

Монахинь может перевозить только жена Санчо. Рассмотрим момент, когда она перевезла первую из них. Жена Санчо должна вернуться, с монахиней на другом берегу должна быть другая женщина. Это, очевидно, жена Дон Кихота. Но тогда с оставшейся на исходном берегу монахиней должна быть ещё монахиня, то есть всего монахинь не менее трёх. Если их ровно 3, рассмотрим переправу, когда их число на другом берегу выросло с 1 до 2. В момент переправы монахиня на другом берегу была, очевидно, с женой Дон Кихота. Но тогда в момент переправы монахиня на исходном берегу оставалась без других женщин. Противоречие. Значит, монахинь не менее 4.

При 4 или более монахинях переправа возможна. Сначала Санчо перевозит Дон Кихота, и возвращается. Затем жена Санчо перевозит жену Дон Кихота, возвращается, и перевозит по одной монахинь, пока на исходном берегу не останутся только две из них. Тогда на другом берегу их тоже не менее двух. Теперь Санчо и его жена плывут на другой берег, перевозят обратно соответственно Дон Кихота и его жену, затем жена Санчо последовательно перевозит на другой берег двух монахинь, потом жену Дон Кихота, и, наконец, Санчо возвращается и перевозит на другой берег Дон Кихота.

8. Ответ: 37 задач.

Докажем, что больше 37 задач придумать не удастся. Перевозка делится на 5 получасовых периодов. В каждом периоде число придуманных задач равно числу работоспособных людей плюс число работоспособных групп. В первом периоде не менее 5 человек остаются на вокзале, в последнем – в лагере, они не работоспособны. Придумывает только группа в машине, и она даст не более 5 задач за период. Во втором периоде по-прежнему неработоспособны 5 человек на вокзале, а работоспособны не более 2 групп, поэтому придумано не более $5+2=7$ задач. Аналогично – для 4-го периода. В третьем периоде есть не более 3 работоспособных групп и даже если все люди работают, придумано не более $10+3=13$ задач. Итого – не более 37 задач.

Приведём пример для 37 задач. Председатель везёт 4 человек (5 задач), обратно везёт одного человека (4 задачи в лагере и 3 в машине), далее везёт 3 человек (группы $3+4+3$ придумывают 13 задач), везёт одного назад ($2+3$ придумывают 7 задач), и наконец, везёт 4 человека в лагерь (5 задач).

Комментарий. Эта и две следующие задачи – на достижение наилучшего результата. Но ни тут, ни там слово «наилучший» в решении не используется. В таких задачах принято разбивать решение на две внешне независимые части: оценка (доказательство того, что нельзя получить ещё лучший результат) и пример (алгоритм, способ). В примере мы просто показываем, как действовать, и результат говорит сам за себя. В оценке мы рассматриваем произвольный способ действий (а вовсе не наилучший), и доказываем для него неравенство (что он не лучше того, что в нашем примере).

9. Ответ: 33 коробки.

Пример. Обозначим братьев и грузы по первым буквам, число коробок пишем после буквы «к».
Брк5 →, р ←, Брдк3 →, р ←, Брк5 →, Б ←, к10 →, ←, к10 →.

Оценка. Всего можно перевезти 2500 кг груза. От момента погрузки рояля до момента его выгрузки фургон сделает не менее 3 рейсов туда, чтобы перевезти трёх братьев. Значит, рояль съездит «туда» не менее 3 раз. Вычитая $3\cdot250$ кг и 100 кг дивана, получаем, что перевезено не более 1650 кг коробок, то есть, не более 33 коробок.

10. Ответ: 6 обменов.

Пример. Пусть на Сатурне были пассажиры массами 400 и 400 кг, а на Земле – два по 200 кг, два по 100 кг и четыре по 50 кг. Сделаем обмены: $400\leftrightarrow 200+200$, $200\leftrightarrow 100+100$, $100\leftrightarrow 50+50$, $100\leftrightarrow 50+50$, $200\leftrightarrow 100+100$, $400\leftrightarrow 200+200$.

Оценка. Если бы можно было сделать 7 операций, то число пассажиров в земной кабине возросло бы на 7. Но тогда мы либо начали с одного пассажира на Земле, либо закончили одним пассажиром на Сатурне. В обоих случаях был бы пассажир, весящий столько, сколько все остальные вместе. Его нельзя уравновесить двумя другими, значит, он в обменах не участвовал, и остался в той же кабине. Но тогда не было бы равновесия в тот момент, когда с ним вместе были другие пассажиры.

СОННАЯ ЛУНАТА

• Вкусная сарделька, в траве сидел кузнечик, барабанные перепонки, серная кислота, кот и мыши, голову помыть, лунная соната, путь Ленина, так предсказал Нострадамус.

• Нет, богатырь не ошибся. Соловей-разбойник хотел сказать:

– Фу-фу, русским духом пахнет... Ну, богатырь, держись! Пришёл твой последний час! Сейчас от тебя мокрое место останется!

СИММЕТРИЯ

Пронумеруем рисунки слева направо сверху вниз: пожарная машина, снежинка, зелёный знак, буква А...

Зеркальную симметрию имеют рисунки 1, 2, 4, 5, 7, 9, 11.

Поворотную симметрию имеют рисунки 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11.

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК

1. Если бы Иванушка просил от двух до пяти шапок, естественнее было бы ожидать ответ *две-пять шапок*, к тому же странно просить такую приблизительную цену; так что ответ не (А). Число иногда прочитывают по составляющим его цифрам (например, диктуя по телефону), но ситуация никак не подразумевала такое чтение, так что ответ не (Б) и не (Г). Если бы Иванушка хотел семь шапок (ответ (В)) и не знал слова *семь*, он сказал бы «две и пять шапок» или «пять и ещё две». Форма же «два-пять» подсказывает, что он имел в виду «два раза по пять», т.е. десять (Иван просил по пять шапок за каждого из пары коней). Царь вполне понял Ивана, ответив: «То есть это будет десять». **Ответ:** (Д).

• Счёт пятёрками был в старину в большом ходу, он опирается на число пальцев руки. Мы сейчас считаем десятками (по числу пальцев на обеих руках), т.е. используем десятеричную систему счёта; в ней названия десятков в основном устроены так же: *двадцать* «два раза по десять», *пятьдесят* «пять раз по десять».

2. Четвертак – это 25 копеек, полтинник – 50 копеек. По мнению Л. Успенского, вещь, за которую просили 50 копеек, на самом деле стоила меньше 25 копеек. Это значит, что цена на неё была завышена более чем в 2 раза. **Ответ:** (В).

3. *Полтора* – это дробное числительное (подразряд количественных числительных), а *раза* – это форма родительного падежа единственного числа существительного «раз». Именно в этой форме существительные сочетаются с числительными *полтора*, *оба*, *два*, *три*, *четыре*. **Ответ:** (А).

• На самом деле, та форма, которую мы в сочетании с числительными сейчас воспринимаем как форму родительного падежа единственного числа, по происхождению является формой именительного-винительного падежа двойственного числа, которая согласовывалась по падежу с числительным *два*. По аналогии эта форма распространилась и на сочетания с числительными *полтора*, *три*, *четыре*.

4. «Кочерга» – 7, «палочки» – 11, «Семён Семёныч» – 77, «дедушка» – 90 (самое большое число, встречающееся при игре в лото). **Ответ:** (Б).

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 5 апреля по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11,
журнал «Квантик».

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Итоги будут подведены в конце года. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги, диски с увлекательными математическими мультфильмами.

Желаем успеха!

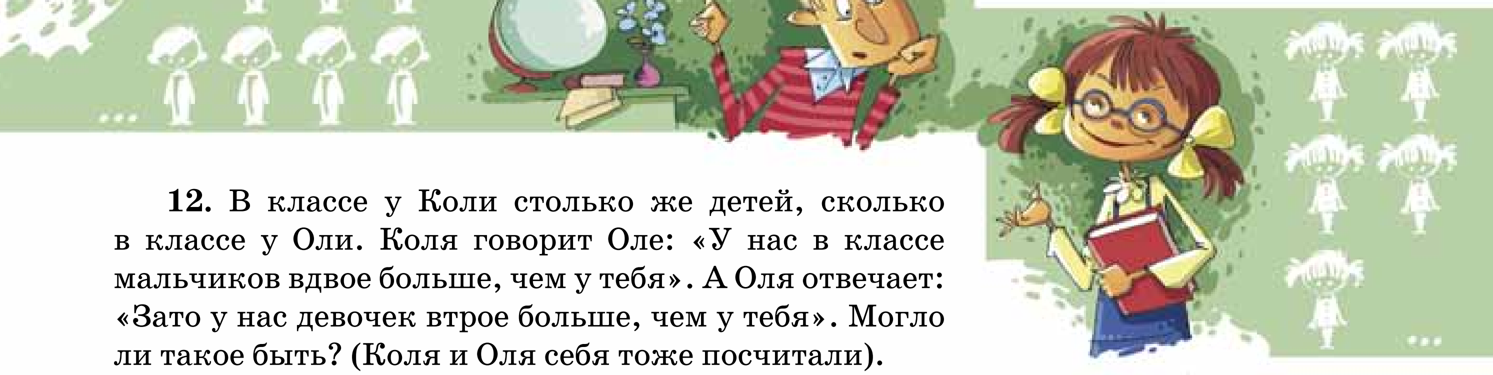
III ТУР

11. Профессор написал на доске шесть утверждений:

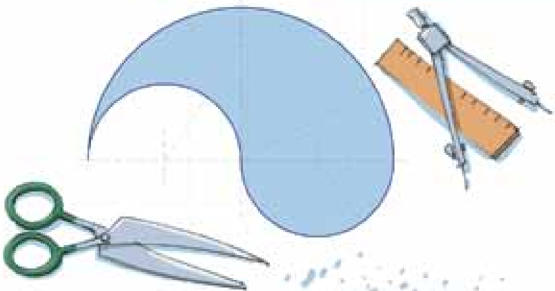
Сегодня на моей лекции будет меньше 10 студентов.
Сегодня на моей лекции будет больше 10 студентов.
Сегодня на моей лекции будет меньше 20 студентов.
Сегодня на моей лекции будет больше 20 студентов.
Сегодня на моей лекции будет меньше 30 студентов.
Сегодня на моей лекции будет больше 30 студентов.

На лекцию пришло N студентов, после чего профессор написал для каждого своего утверждения, верное оно или нет. Оказалось, что ровно четыре утверждения оказались неверными. Чему равно N? Укажите все возможные ответы.

Авторы:
Григорий Гальперин (11),
Александр Ковальджи (12)



12. В классе у Коли столько же детей, сколько в классе у Оли. Коля говорит Оле: «У нас в классе мальчиков вдвое больше, чем у тебя». А Оля отвечает: «Зато у нас девочек втрое больше, чем у тебя». Могло ли такое быть? (Коля и Оля себя тоже посчитали).



13. Перед вами рисунок «капли» – верхняя граница состоит из полуокружности радиуса 2, а нижняя граница – из двух полуокружностей радиуса 1 (одна «смотрит» внутрь капли, а другая – «наружу»). Разрежьте каплю

а) на две одинаковые части;

б) на три одинаковые части;

в) можно ли разрезать её на 100 равных частей?

14. В таблице 10×10 клетки окрашены в 9 цветов. Если в некоторой строке или в некотором столбце находятся две клетки одного цвета, то можно перекрасить этот столбец или эту строку в этот цвет. Из любого ли исходного положения можно всю таблицу перекрасить в один цвет?

15. Бизнесмен заключил с чёртом соглашение: каждый день бизнесмен даёт чёрту одну купюру, а взамен получает любое число купюр, какое захочет, но меньшего достоинства. Другого источника купюр у бизнесмена нет. Докажите, что в какой-то момент бизнесмен разорится (сколько бы купюр ни было у него вначале и как бы он ни менял их у чёрта).

Художник Леонид Гамарц

ТОРТ С ГЛАЗУРЬЮ

Квадратный торт облили сверху и по бокам шоколадной глазурью.

Разрежьте торт на 5 цельных кусков так, чтобы в них и торта было поровну, и глазури тоже.

Художник Евгения Константинова