А. Блинков

Геометрические построения с помощью треугольника-шаблона

Несколько лет назад на Турнире Ломоносова была предложена следующая задача (автор – И.Ф. Акулич): пользуясь как шаблоном только стандартным угольником с углом 30°, постройте угол величиной 15°.

Понятно, что мы можем обвести данный шаблон и получить его копию на бумаге. А что же нам требуется построить в полученном треугольнике? Несложно осознать, что для построения угла 15° достаточно построить биссектрису угла 30°. Для того, чтобы придумать это построение, вспомним, что нам известно о биссектрисе, кроме её определения. Например, мы знаем, что биссектриса угла является его осью симметрии. Тогда можно осуществить построение, показанное на рисунке 1 (ABC и $AB'C'$ – два различных положения шаблона). Наглядно ясно, что, получив точку D пересечения BC и $B'C'$, мы сможем построить биссектрису BD треугольника ABC, поэтому любой из углов CAD или BAD будет искомым.

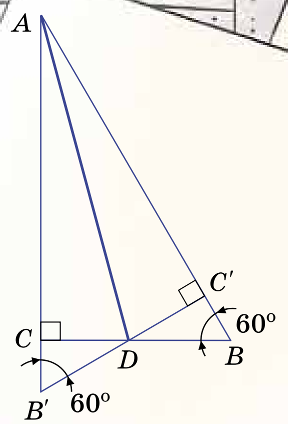


Рис. 1

Чтобы доказать, что это действительно так, давайте разберемся, что же мы сделали, изменив положение шаблона. Вершины B' и C' треугольника $AB'C'$ симметричны вершинам B и C треугольника ABC относительно искомой биссектрисы угла, поэтому симметричны также и отрезки BC и $B'C'$, поэтому точка D их пересечения симметрична сама себе, а значит, она лежит на этой биссектрисе! Так как вершина A заведомо принадлежит искомой биссектрисе, то построенный луч AD является биссектрисой угла BAC.

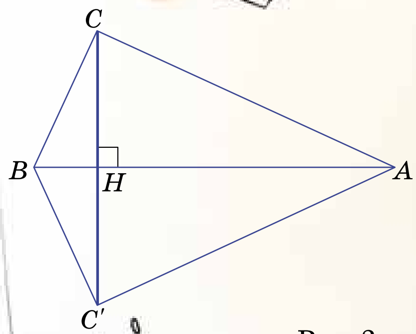


Рис. 2

А можно ли аналогичным образом построить другие биссектрисы треугольника ABC? Ответив на этот вопрос, вы заодно найдете и другой способ решения исходной задачи.

Естественным образом возникает и другой вопрос: какие еще замечательные линии треугольника ABC можно построить, если пользоваться только этим треугольником как шаблоном?

Попробуем, например, построить высоту треугольника. Здесь выбора у нас нет и мы будем строить высоту из вершины C, поскольку две другие высоты – это стороны AC и BC. На выручку опять приходит симметрия, а именно, тот факт, что ось симметрии является серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему две симметричные друг другу точки! Значит, можно осуществить построение, показанное на рисунке 2. Действительно, точки C и C' симметричны относительно прямой AB, поэтому отрезок CH, где H – точка пересечения CC' и AB, является высотой треугольника ABC.

А теперь построим медиану треугольника из той же вершины C. Для этого достаточно расположить шаблон так, как показано на рисунке 3, и провести отрезок CC', который пересечет отрезок AB в его середине O. Тогда CO – искомая медиана. Действительно, мы достроили прямоугольный треугольник ABC до прямоугольника и воспользовались тем, что его диагонали (как и у любого параллелограмма) делятся точкой пересечения пополам. Вспомнив, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии, можно объяснить это построение и по-другому. Расположив шаблон указанным способом, мы получили два треугольника, симметричных относительно точки O – середины AB. Центр симметрии является серединой отрезка, соединяющего две симметричные друг другу точки, значит, O – середина как отрезка CC', так и отрезка AB.

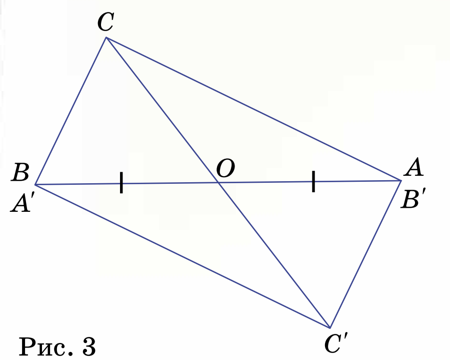
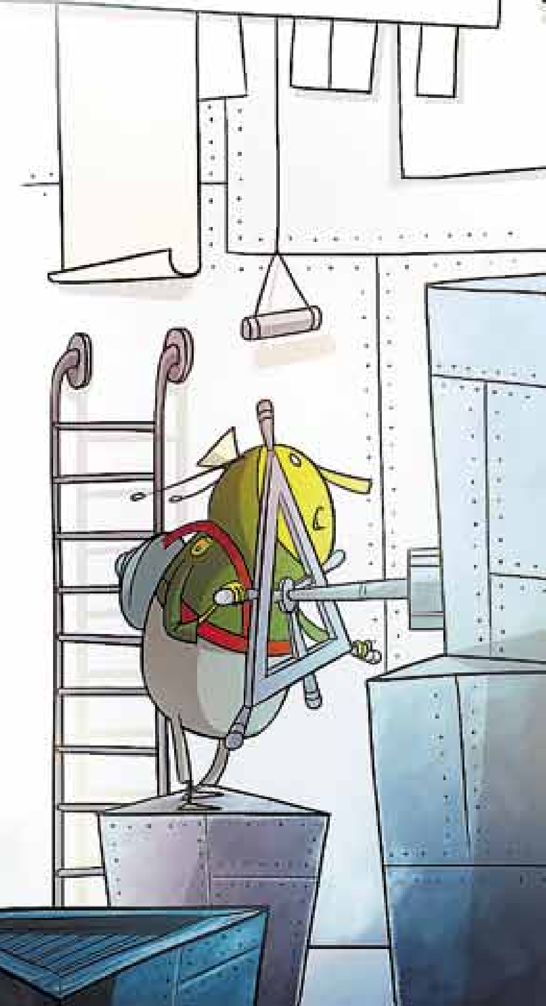


Рис. 3

Научившись строить биссектрису, высоту и медиану треугольника, для полноты картины хотелось бы уметь строить и серединный перпендикуляр к стороне. Так как середину O стороны AB мы строить уже умеем, то остается найти способ построить еще одну точку, лежащую на этом перпендикуляре. На выручку опять приходит осевая симметрия. Расположим шаблон так, как показано на рисунке 4, тогда искомый серединный перпендикуляр будет осью симметрии треугольников ABC и $A'B'C'$, поэтому точка P пересечения симметричных отрезков AC и $A'C'$ лежит на этом перпендикуляре. Построив точку P, получим, что OP – серединный перпендикуляр к стороне AB.



СВОИМИ РУКАМИ

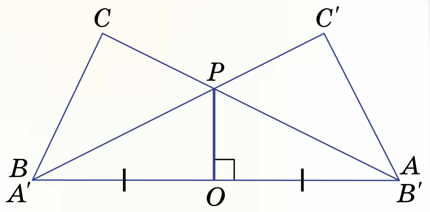


Рис. 4

До сих пор мы «деликатно» обходили один вопрос: каждый раз, построив нужные точки, мы должны их соединить отрезком, а хватит ли длин сторон треугольника-шаблона, чтобы использовать одну из них в качестве линейки?

Оказывается, шаблон выбран настолько удачно, что все показанные построения мы сможем осуществить! Действительно, так как угол ADB – тупой (см. рис. 1), то AB – наибольшая сторона треугольника ADB, следовательно, $AD < AB$. Поэтому при построении биссектрисы в качестве линейки можно использовать гипотенузу треугольника-шаблона. Далее, так как $\angle CAB = 30^\circ$, то $\angle CAC' = 60^\circ$ и $AC = AC'$ (см. рис. 2), то есть треугольник ACC' – равносторонний. Значит, для построения высоты нам достаточно в качестве линейки использовать больший катет треугольника-шаблона (а можно и гипотенузу). При построении медианы мы получили прямоугольник $ACBC'$ (см. рис. 3), поэтому $CC' = AB$, то есть в качестве линейки опять можно использовать гипотенузу. А при построении серединного перпендикуляра в качестве линейки можно использовать любую сторону шаблона (см. рис. 4), так как отрезок PO меньше любой его стороны (докажите!).

Попробуйте обобщить поставленную задачу: можно ли аналогичными способами построить биссектрису, высоту, медиану и серединный перпендикуляр к стороне, если в качестве шаблона использовать произвольный треугольник? Мы вернёмся к этому вопросу в следующем номере.

Художник В. Пяткин