тридцать третий турнир ГОРОДОВ

ТУРНИР ГОРОДОВ – международное соревнование по математике для школьников 8 – 11 классов (хотя иногда на Турнир приходят даже пятиклассники). Для каждого школьника это просто одна из олимпиад, проводящихся в его городе, города же соревнуются заочно.

В Турнире участвуют более 100 городов со всего мира, их общее население – около 100 миллионов человек, а число школьников, ежегодно решающих задачи Турнира – около 10 тысяч. Если вы хотите, чтобы Турнир проводился и в вашем городе, попросите своего учителя математики написать письмо по адресу turgor@mccme.ru с заявкой на участие.

Турнир проходит каждый год осенью и весной в двух вариантах – базовом и сложном. Всего получается четыре попытки: школьник может написать хоть все четыре варианта, а результатом считается наиболее успешное выступление в одном из них.

ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ

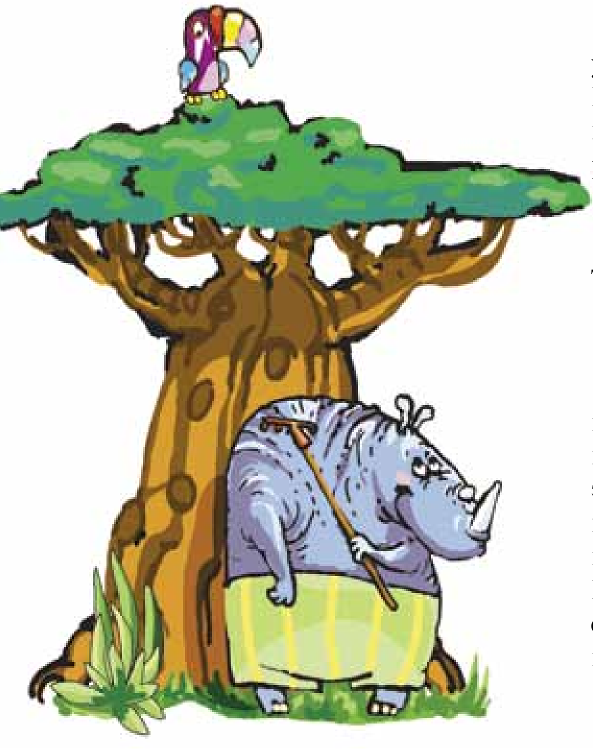
Базовый вариант

1 [3]. Под одной из клеток доски 8×8 зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада (одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне клетку). Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад?

Н.П. Стрелкова

2 [4]. Существует ли натуральное число, у которого нечётное количество чётных натуральных делителей и чётное количество нечётных? (Множество натуральных делителей любого натурального числа всегда содержит 1 и само это число.)

Г.К. Жуков



3 [4]. Дан параллелограмм $ABCD$. Вписанные окружности треугольников ABC и ADC касаются диагонали AC в точках X и Y. Вписанные окружности треугольников BCD и BAD касаются диагонали BD в точках Z и T. Докажите, что если все точки X, Y, Z, T различны, то они являются вершинами прямоугольника.

Р.К. Гордин

4. В выражении 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1 расставили скобки так, что в результате вычислений получилось целое число. Каким

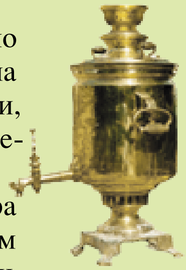
а) **[2]** наибольшим; б) **[3]** наименьшим может быть это число?

И.Ф. Акулич

5 [5]. У Носорога на шкуре есть вертикальные и горизонтальные складки. Всего складок 17. Если Носорог чешется боком о дерево, то либо две горизонтальные, либо две вертикальные складки на этом боку пропадают, зато на другом боку прибавляются две складки: горизонтальная и вертикальная. (Если двух складок одного направления нет, то ничего не происходит.) Носорог почесался несколько раз. Могло ли случиться, что на каждом боку вертикальных складок стало столько, сколько там раньше было горизонтальных, а горизонтальных стало столько, сколько там было вертикальных?

И. Высоцкий

тридцать третий турнир ГОРОДОВ



Дипломами центрального жюри награждаются школьники, набравшие примерно 12 баллов и выше. Около 70 школьников с самыми высокими баллами приглашаются на Летнюю конференцию Турнира – там они решают интересные исследовательские задачи, а по вечерам пьют чай из большого старинного самовара, который стал символом конференции.

Познакомьтесь с задачами для 8–9 классов недавно прошедшего весеннего тура XXXIII Турнира. По правилам, в каждом варианте в зачёт идут три задачи, по которым школьник получил больше всего баллов. В скобках у каждой задачи указаны баллы, присуждавшиеся за полное её решение.

Сложный вариант

1 [4]. В ряд лежит чётное число груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более чем на 1 г.

А.В. Шаповалов

2 [4]. На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары и соединяет точки в каждой паре отрезком. Всегда ли он может сделать это так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

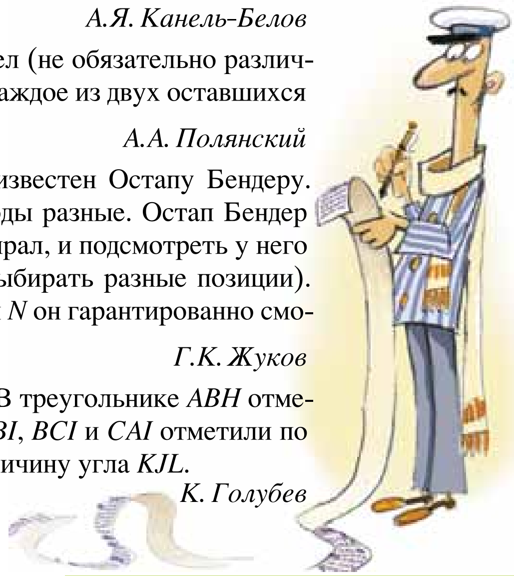
А.В. Шаповалов

3 [6]. В команде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N-го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N – спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая команда осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)

А.С. Бердников

4 [6]. В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «–». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более n ходов.

А.Я. Канель-Белов



5 [8]. Пусть p – простое число. Набор из $p + 2$ натуральных чисел (не обязательно различных) назовём «интересным», если сумма любых p из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все «интересные» наборы.

А.А. Полянский

6 [8]. Банк обслуживает миллион клиентов, список которых известен Остапу Бендеру. У каждого есть свой PIN-код из шести цифр, у разных клиентов коды разные. Остап Бендер за один ход может выбрать любого клиента, которого он ещё не выбирал, и подсмотреть у него цифры кода на любых N позициях (у разных клиентов он может выбирать разные позиции). Остап хочет узнать код миллионера Корейко. При каком наименьшем N он гарантированно сможет это сделать?

Г.К. Жуков

7 [8]. В равностороннем треугольнике ABC провели высоту AH. В треугольнике ABH отметили точку пересечения биссектрис I. В каждом из треугольников ABI, BCI и CAI отметили по точке пересечения биссектрис – L, K и J соответственно. Найдите величину угла KJL.

К. Голубев

Художник: Ирина Гумерова