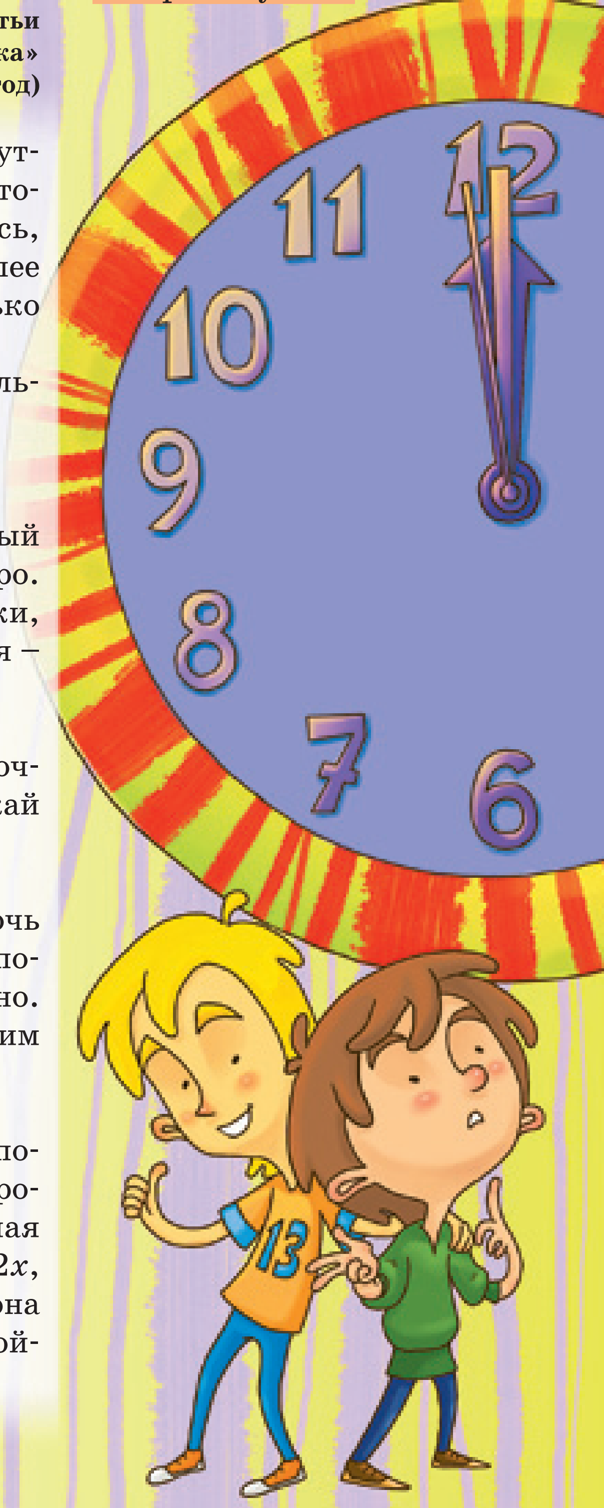
ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПРОДОЛЖАЮТСЯ

Игорь Акулич

(эта статья написана как продолжение статьи С.Дориченко «Приключения со стрелками» из «Квантика» № 1 за 2012 год)



– Что ж, Федя, задачу о том, сколько раз в сутки совпадают часовая и минутная стрелки, мы с тобой одолели, – разглагольствовал Даня. – Оказалось, ровно 22 раза. Ну, а теперь предлагаю победить более сложную, на мой взгляд, задачу – выяснить, сколько раз совпадут все три стрелки.

– Что ж тут сложного! – воскликнул Федя. – Только в полдень. Ну, и в полночь.

– Ты уверен?

– Ну… Почти.

– Вот именно. Секундная стрелка делает полный оборот за минуту и движется очень даже шустро. И если часовая и минутная стрелки очень близки, а в этот момент через них перепрыгивает секундная – поди тут разбери, совпали они все три или нет!

– Как же быть?

– И ты меня ещё спрашиваешь! Кто из нас в Заочной математической школе учится? Вот и привлекай математику! Иначе какой смысл её зубрить?

– Верно. А как?

– Э… да я и сам не знаю. Но попробую. В полночь все стрелки совпадают, и в полдень тоже – это понятно. А в промежутке между ними – что? Неясно. О! Придумал! Для начала давай весь путь обозначим за единицу.

– А где тут весь путь?

– Конечно, полный оборот – что же ещё? Предположим, три стрелки совпали. При этом часовая прошла путь x, где x больше 0, но меньше 1. Минутная движется в 12 раз быстрей, и она продвинется на $12x$, а секундная – в 60 раз быстрей минутной, значит, она преодолеет $720x$. Вот! А дальше? Как отобразить тройное совпадение?

– Подожди, я понял, как! Если две стрелки совпадают, то разность пройденных ими путей равна целому числу оборотов! Поэтому совпадение часовой и минутной стрелок можно выразить так: разность $12x - x = 11x$ – *целое* число!

– Более того: это *натуральное* число, то есть непременно и *целое*, и *положительное*. Ведь минутная стрелка заведомо сделает *больше* оборотов, чем часовая!

– Согласен. Из совпадения часовой и секундной стрелок делаем вывод: разность $720x - x = 719x$ – тоже натуральное число! А из совпадения минутной и секундной...

– Хватит уже, разошёлся! Если совпадают часовая и минутная стрелки, а также часовая и секундная, то минутная и секундная *автоматически* совпадут – куда им деваться-то?

– Что же дальше? Нас учили, что удобнее всего натуральные числа обозначать буквами m, n и им подобными. Так и сделаем. Пусть $11x = m$, а $719x = n$. И теперь...

– Я знаю, что теперь! Из первого равенства $x = \frac{m}{11}$, из второго $x = \frac{n}{719}$. Поэтому $\frac{m}{11} = \frac{n}{719}$.

– Ну, ты даёшь! Дробей каких-то наворотил! Ещё сложней всё стало!

– Но зато мы избавились от числа x, которое может быть *любым*, и работаем с двумя *натуральными* числами! А от дробей избавиться легко – умножим обе части на 11 и на 719 и получим $719m = 11n$.

– Отлично! Дальше всё ясно. Ведь 719 на 11 не делится. Поэтому m *обязано* делиться на 11. А значит, m не меньше 11 – оно ведь натуральное! Поэтому x, равное $\frac{m}{11}$, не меньше $\frac{11}{11} = 1$. А это противоречит предположению, что x меньше 1. Готово! Значит, и вправду, совпадения всех трёх стрелок только в полдень и в полночь бывают.

– Ай да мы!

– Знаешь что, давай попробуем ответить на другой вопрос. Я раньше подумывал над ним, но не знал, как подступиться. Теперь, кажется, знаю. Слушай: сколько раз в сутки три стрелки направлены строго в разные стороны? Иначе говоря, образуют между собой углы, равные 120°?

– По-моему, здесь возможны два варианта: по направлению вращения после часовой стрелки сначала находится минутная, а потом секундная, либо наоборот – сначала секундная, затем минутная.

– Верно! Рассмотрим первый вариант. В тех же обозначениях, что и раньше, тот факт, что минутная стрелка опережает часовую на некоторое *целое* число оборотов плюс *одна треть* оборота, запишется так: $11x = m + \frac{1}{3}$, а то, что секундная стрелка опережает часовую тоже на целое число оборотов *плюс две трети* оборота, выглядит так: $719x = n + \frac{2}{3}$. Аналогично предыдущему, исключаем x и получаем: $\frac{m+\frac{1}{3}}{11} = \frac{n+\frac{2}{3}}{719}$. Ого!

– Давай умножим оба числителя на 3 – от многоэтажности избавимся: $\frac{3m+1}{11} = \frac{3n+2}{719}$. Теперь уберём дроби: $719(3m+1) = 11(3n+2)$. Раскроем скобки: $2157m + 719 = 33n + 22$. Можно ещё вычесть из обеих частей по 22: получим, что $2157m + 697 = 33n$. А дальше?

– Я понял! Смотри – 697 *не делится* на 3!

– И что?

– Но остальные-то слагаемые делятся! Запишем так: $33n - 2157m = 697$, или, по-другому: $3(11n - 719m) = 697$. Левая часть делится на 3, правая – нет. Значит, решения нет.

– Осталось рассмотреть второй вариант…

– Ну, это проще простого. Здесь получается $\frac{m+\frac{2}{3}}{11} = \frac{n+\frac{1}{3}}{719}$. Если теперь аналогично преобразовать, то приходим… э-э-э… вот к такому равенству: $3(11n - 719m) = 1427$. Та же история! Итак, стрелки не могут попарно образовывать углы, равные 120°.

– А жаль! Так бы красиво было!

– Согласен!

Художник Алие Абдямитова