Улыбнись

Игорь Акулич

Математические ляпы

Нередко для «оживления» придуманной задачи автор пытается вместо строгого сугубо математического изложения придумать какой-нибудь занимательный сюжет. Но здесь главное – не переборщить. Иной раз автор настолько увлекается занимательностью сюжета, что пропадает всякая реальность, и остаётся только изумляться возникающим парадоксам.

Рассмотрим положительные числа a и b. Их среднее арифметическое – это $\frac{a+b}{2}$, а среднее геометрическое – это $\sqrt{ab}$. Чуть меньшей известностью пользуется среднее гармоническое, равное $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$. Обратим внимание, что произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно произведению самих чисел a и b, т.е. $\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab$. В 1999 году московский математик и педагог А. Канель понял, что из этого можно «слепить» неплохую олимпиадную задачу, примерно такую:

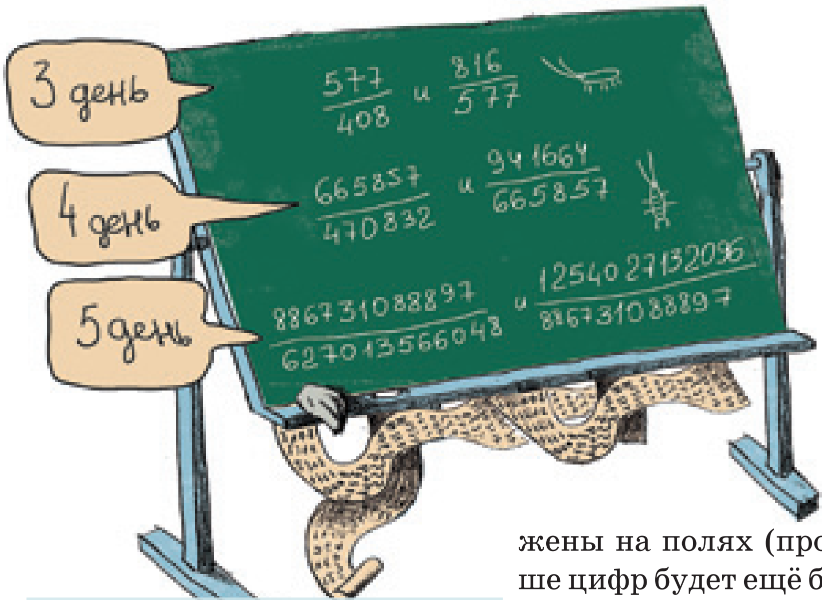
Пусть $a_0=1$, $b_0=2$, *и для любого натурального* n *числа* a_n и b_n *– соответственно среднее арифметическое и среднее гармоническое чисел* a_{n-1} *и* b_{n-1}. *Найдите произведение* $a_{1999}\times b_{1999}$.

Решение вполне очевидно: произведение $a_n\times b_n$ одно и то же для всех n, поэтому $a_{1999}\times b_{1999}=a_0\times b_0=2$.

Но автор, видимо, решил, что условие выглядит скучновато, и «оживил» его следующим образом:

На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 *и* 2. *Найдите произведение чисел, которые Петя напишет вечером* 1999*-го дня.*

В таком виде задачу предложили девятиклассникам на LXII Московской олимпиаде. Вроде бы задача отличается от первоначальной лишь появлением сюжетной линии, а по сути эквивалентна первоначальной. Но давайте-ка проследим за действиями старшего научного сотрудника Пети. В первый день он напишет на доске числа $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ и $2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$. Во второй день – чис-



ла $\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}$ и $2:\frac{17}{12}=\frac{24}{17}$ (мы ведь помним, что произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно 2, так что можно вычислять только среднее арифметическое, а среднее гармоническое получать его «переворачиванием» с одновременным умножением на 2). Числа, которые окажутся на доске на третий, четвёртый и пятый дни, изображены на полях (проверьте, если сомневаетесь). Дальше цифр будет ещё больше. Через день-другой возможности обыкновенного калькулятора будут исчерпаны, и Пете придется вернуться к старому доброму умножению «в столбик». Конечно, Петя может воспользоваться и компьютером – старший научный сотрудник всё-таки. Но интересно, сможет ли он выписывать на доске эти числа – хватит ли ему места? Да и сумеет ли компьютер подсчитать эти числа? Уж больно быстро они возрастают…

Читатель, наверное, уже предчувствует ответ. А если есть желание в нём убедиться – взгляните на поля.

Итак, числитель дроби, которую Петя должен написать на доске на 1999-й день, будет содержать более 10^{599} цифр. Сказать, что это число очень большое – значит ничего не сказать. Оно неимоверно большое. Даже если Петя будет выписывать сто цифр в секунду, то ему потребуется более 10^{597} секунд. Так как в году заведомо меньше 100 миллионов секунд, то Пете понадобится более 10^{589} лет для того, чтобы выписать один только этот числитель…[1]

Другой казусный случай произошёл со следующей задачей.

Сорок четыре точки движутся с постоянными скоростями по отрезку AB от A к B и обратно (A-B-A-B-... и так далее). В начальный момент все точки совпадают с точкой A. При этом скорость второй точки вдвое больше скорости первой, скорость третьей вдвое больше скорости второй и так далее. Мо-

Запишем число в виде несократимой дроби: $\frac{p}{q}$. Тогда второе $\frac{2q}{p}$, и следующее «поколение» чисел окажется таково: одно $\frac{\frac{p}{q}+\frac{2q}{p}}{2}=\frac{p^2+2q^2}{2pq}$, а второе – $\frac{4pq}{p^2+2q^2}$.

Можно доказать, что, если $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь, то есть p и q взаимно просты, то и дроби в выражениях для следующих чисел также несократимы. Таким образом, числители и знаменатели новых дробей неукротимо растут. Но какими темпами? Давайте их оценим. Числитель очередного числа p^2+2q^2, что больше p^2. Оценка, заметьте, довольно грубая, но нам с избытком хватит и её. Мы уже знаем, что $p_5=886731088897>10^{11}$. Значит, $p_6>10^{22}$, $p_7>10^{44}, \ldots, p_{1999}>$ $>10^{11\cdot 2^{1994}}>10^{11\cdot 16\cdot (2^{10})^{199}}>10^{176\cdot (10^3)^{199}}=$ $=10^{176\cdot 10^{597}}>10^{10^{599}}$.

[1] А на самом деле – и того больше, потому что оценка количества цифр числителя, как мы отметили, довольно грубая. Попробуйте её оценить, используя точную формулу.

гут ли положения всех точек в какой-то момент времени совпасть в каком-то месте, отличном от А?

Создатель этой задачи (к сожалению, он неизвестен), по-видимому, просмотрел когда-то великолепную экранизацию пьесы М.Булгакова «Бег», где показаны яркие эпизоды тараканьих бегов. Весьма вероятно, что этот фильм (или же личная бытовая неустроенность) сподвиг автора сформулировать задачу по-иному и предложить ее в 2005 г. на одном из турниров в следующем виде:

В очередном забеге по коридору общежития участвуют 44 веселых таракана. Тараканы стартовали одновременно от одной стены. Добежав до противоположной стены, таракан сразу поворачивает обратно. Первый таракан бежит не очень быстро, второй – вдвое быстрее, третий – вдвое быстрее второго, и так далее. Могут ли тараканы встретиться все вместе в точке, отличной от точки старта?

Авторский ответ таков: *могут*. А именно, если ширина коридора равна S, а скорость первого таракана равна v, то ровно через промежуток времени после старта, равный $2S/3v$, все тараканы окажутся на расстоянии $2S/3$ от точки старта. Попробуйте сами доказать это несложное утверждение. Очевидно, что это первый момент, когда встретятся все тараканы – это первая встреча даже только для первых двух тараканов.

Убедились? Все согласны? Хорошо.

А теперь проследим, как грубая реальность нахально врывается в изящные теоретические рассуждения и с треском обрушивает ажурные умозрительные конструкции. Оказывается, что на самом деле тараканы не встретятся никогда. Хотите убедиться – взгляните на поля. Вычисление показывает, что встреча произойдет не раньше, чем через... 165 тысяч лет. Увы (или, может быть, к счастью), тараканы столько не живут. А значит, и встретиться им не суждено. Вот если бы тараканов было поменьше – в пределах десятка – тогда другое дело.

А в заключение – совет читателям: когда будете сами составлять «сюжетную» задачу, будьте осторожны! Иначе есть риск попасть впросак, подобно авторам рассмотренных нами задач.

Из условия следует, что последний таракан бежит быстрее первого в $2^{43} = 8\ 796\ 093\ 022\ 208$ раз. Это больше, чем $8 \cdot 10^{12}$. Скорость любого «бытового» таракана заведомо не превосходит 1 м/с (тоже сильно завышенное значение). Значит, и скорость последнего – самого быстрого – таракана не больше 1 м/с. Посему скорость первого таракана никак не больше $1 : (8 \cdot 10^{12}) = 1{,}25 \cdot 10^{-13}$ м/с. Ширина коридора общежития, наверное, не меньше метра (дабы жильцы могли в нём хоть как-то разминуться), и тогда предполагаемая точка встречи всех тараканов находится на расстоянии не менее $2 \cdot 1/3 > 0{,}66$ метра от точки старта. И, стало быть, первый (не слишком быстрый, как сказано в условии) таракан доберётся до неё не раньше, чем через

$0{,}66 : (1{,}25 \cdot 10^{-13}) = 5{,}28 \cdot 10^{12}$

секунд, что составляет больше 165 тысяч лет!

Художник Артём Костюкевич