НАШ КОНКУРС («Квантик» №6)

26. Пусть стороны нашего прямоугольника равны a и b. 10% от a – это десятая часть a, или $0{,}1a$, 10% от b – это $0{,}1b$. Значит, первая сторона стала равна $a+0{,}1a=1{,}1a$, а вторая $b-0{,}1b=0{,}9b$. Тогда площадь нового прямоугольника равняется $1{,}1a\cdot 0{,}9b=0{,}99ab$, что составляет 99% от старой площади ab. Значит, площадь обязательно уменьшится, независимо от того, которую сторону мы удлиняли, а которую укорачивали.

27. Да, можно. Например, так:

$$(2\cdot2\cdot2+2)\cdot(2\cdot2\cdot2+2).$$

28. Например, Гриша может действовать так: он взвесит три монетки из первого мешочка и одну из второго. От этого весы не сломаются: максимальный вес равен $3\cdot10{,}1+10=40{,}3$ г.

Давайте проверим, что, узнав получившееся число, мы однозначно сможем распознать мешочки. Действительно, возможны только 6 случаев:

$$3\cdot10{,}1+10=40{,}3,\quad 3\cdot10{,}1+9{,}9=40{,}2,$$
$$3\cdot10+10{,}1=40{,}1,\quad 3\cdot10+9{,}9=39{,}9,$$
$$3\cdot9{,}9+10{,}1=39{,}8,\quad 3\cdot9{,}9+10=39{,}7.$$

Видно, что по каждому из результатов однозначно определяется, в каком мешочке что лежит (например, если весы покажут нам 40,1 г, то обязательно в первом мешочке все монетки по 10 г, во втором все по 10,1 г, в третьем по 9,9 г).

29. Ответ: у *А* один глаз, у *Б* два глаза, у *В* один глаз.

Решение: Мысленно разместим пиратов по кругу и будем говорить, что *Б* идёт после *А*, *В* идёт после *Б*, *А* идёт после *В*.

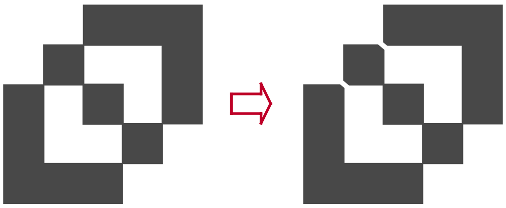
Давайте предположим, что у кого-то из пиратов нет глаз, то есть он дважды сказал правду. Тогда у следующего за ним должно быть два глаза, то есть он дважды солгал. Тогда у третьего пирата не 2 глаза (иначе предыдущий сказал бы правду) и не 0 (иначе у следующего (первого) их было бы 2). Значит, у него 1 глаз, и всего в сумме набирается 3 глаза, и среди первых трёх утверждений только одно верное. Значит, среди трёх последних утверждений должно быть ещё два верных. Но, очевидно, среди них не может быть несколько верных.

Значит, у каждого из пиратов есть хотя бы по одному глазу. Если у всех ровно по одному глазу, то все три первых утверждения неверны, тогда среди трёх последних утверждений должно быть три верных, что опять же невозможно.

Итак, у кого-то есть два глаза, и он дважды солгал. Тогда у следующего за ним не 2 глаза (иначе первый сказал бы правду) и не 0 (самый первый случай). Тогда у него 1 глаз. Тогда у третьего не 2 глаза (иначе, рассуждая аналогично, у следующего (первого) он был бы 1) и не 0. Значит, у третьего 1 глаз (и, соответственно, он уже сказал правду про первого, и больше правды нам не поведает), и второй солгал, сказав, что у него их 2 (и, соответственно, второе его утверждение должно быть верным). Всего в сумме набралось 4 глаза, то есть всего 4 неверных утверждения. Среди первых трёх их два, а значит, и среди последних трёх их тоже два, и верно только утверждение пирата *В*: «У нас 4 глаза на троих». Значит, *В* – второй пират с одним глазом, тогда *Б* – первый пират с двумя глазами, *А* – третий пират с одним глазом.

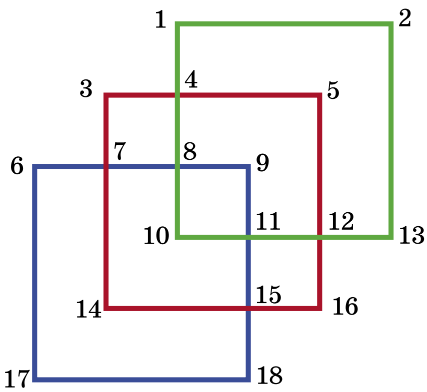
Легко проверить, что случай, когда у *А* один глаз, у *Б* два глаза, у *В* один глаз, действительно подходит под условие задачи.

30. Прежде всего, займемся исходной задачей Кэрролла. Он решил её весьма остроумно: раскрасил все получающиеся области попеременно в чёрный и белый цвета (рис. слева), а затем «срезал углы» (токарь сказал бы «снял фаски»). После этого осталось только обвести контур чёрной фигуры – и не будет ни одного пересечения (рис. справа):



А теперь – «антизадача» – о максимальном возможном числе пересечений. Исходная конфигурация, как видно, содержит 6 точек самопересечения, но вряд ли при рисовании мы можем добиться того, чтобы рисуемая линия пересекла себя во всех шести этих точках (назовем эти точки *узлами*). В некоторых узлах, возможно, придется «свернуть», и наша задача – минимизировать количество таких поворотов.

Исходная конфигурация есть «композиция» из трех одинаковых квадратов. Раскрасим их в три разных цвета и пронумеруем «характерные» точки следующим образом:



Пусть мы начали рисовать с какой-то точки, и первоначально линия имела один из этих трёх цветов. В процессе рисования она должна где-то поменять цвет на другой, а потом и на третий. Заметим, что замена цвета возможна только в узле, причем в таком узле пересечения не будет (ибо линия при подходе к узлу ничего не пересечёт, а вынуждена будет свернуть вправо или влево от направления движения). Так что при замене первого цвета на второй хотя бы один узел окажется «непересечённым». Далее, при замене второго цвета на третий также один узел окажется «непересечённым». Отметим, что эти два «непересечённых» узла не могут быть одним и тем же узлом, поскольку в первом из них пересекаются линии первого и второго цветов, а во втором – второго и третьего цветов.

Таким образом, по крайней мере в двух узлах пересечений не будет. А поскольку узлов всего 6, то количество пересечений не может быть больше $6-2=4$. Такое значение достигается. Вот пример, как этого добиться: надо нарисовать ломаную в таком порядке: 17-6-7-8-9-11-15-14-7-3-4-5-12-11-10-8-4-1-2-13-12-16-15-18-17. При этом пересечения произойдут в узлах 4, 7, 8 и 11, а без пересечений вынужденно останутся узлы 12 и 15.

Ответ: максимальное число пересечений равно 4.

РАДИО И СИГНАЛЫ («Квантик» № 6)

Приводим решение задачи, которая была задана в статье на стр. 12. Время восхода Солнца никак не изменилось бы. Солнце светит не только с того момента, когда попадает в пределы нашей видимости, но и до этого. Когда Земля перестаёт заслонять нам Солнце, в наши глаза тут же попадает свет, который, правда, был испущен Солнцем 8 минут назад.

МЕРСЕДЕС ЗА ТРЕМЯ ДВЕРЯМИ («Квантик» №7)

Здесь заключённым допущена ровно та же ошибка, что и Биллом. Заключённый узнает лишь, кто именно из оставшихся заключённых будет точно освобождён, но эти сведения не дадут ему никакой дополнительной информации о том, будет ли освобождён он сам.

Приведём ещё одно объяснение, отличное от тех, что были в статье.

Пусть имеются три заключённых: A, B и C, причём A – знакомый надзирателя. Возможны три равновероятных случая: освободят A и B, освободят A и C или освободят B и C. Видим, что в двух из этих случаев A освобождают, то есть вероятность выйти на свободу составляет для него 2/3.

Посмотрим, что изменится, если надзиратель Тэд назовёт имя одного из освобождённых.

В первом случае Тэд скажет, что освобождают B, при этом A тоже освободят. Во втором случае Тэд скажет, что освобождают C, при этом A тоже освободят. В третьем случае Тэд равновероятно может сказать, что освобождают B или освобождают C, при этом A не освободят. Значит, если A услышит, что освобождают B, то это либо первый случай, либо последний, причём в два раза более вероятно, что это именно первый случай. То есть в этой ситуации он выйдет на свободу снова с вероятностью 2/3. Аналогично, если A услышит, что освобождают C, то это либо второй случай, либо последний, причём в два раза более вероятно, что это именно второй случай. И снова A выходит на свободу с вероятностью 2/3.

КРИВЫЕ ИЗ ПРЯМЫХ («Квантик» № 7)

Ответ к упражнению: красный график отвечает значению $k = 2$, чёрный – значению $k=1$, синий – значению $k=1/2$. В каждой точке x значение функции $y=2x^2$ больше, чем значения функции $y=x^2$ и $y=1/2\,x^2$; значит, график функции $y=2x^2$ расположен выше всех остальных; то есть на чертеже он нарисован красным. Аналогично график $y=1/2x^2$ расположен ниже всех, а значит, синий. Получается, что график $y=x^2$ чёрный.

Ответ к вопросу: парабола «растянется». Представить себе, что произойдет, легко, если проделать такой мысленный эксперимент. Будем смотреть на лист бумаги с подвинутой вверх точкой с такого расстояния, что нам будет казаться, что точка на том же расстоянии, что и раньше. Тогда с этого расстояния нам будет казаться, что парабола не изменилась. Тогда, чтоб представить, что произойдет с параболой, нужно посмотреть на исходную параболу с более близкого расстояния.

АВТОБУС, ДОМИК И ВОЗДУШНЫЙ ШАР («Квантик» №7)

Хотя автобус выглядит абсолютно симметричным, догадаться, куда он едет, всё-таки можно. Ведь двери у него с одной стороны – со стороны обочины. Раз дверей не видно, обочина находится за автобусом, и по нашим представлениям это означает, что автобус едет влево. Но художник оставил ловушку: по надписи на автобусе становится понятно, что дело происходит в Индии, а там движение левостороннее! Значит, автобус едет вправо. Если вы задачу решили, но попались в ловушку, не расстраивайтесь. Главное – придумать решение!

Дверь открывается наружу, поскольку снаружи видны петли. Если бы такая дверь открывалась внутрь, она вращалась бы относительно своего ребра (края), которое внутри комнаты, а она должна вращаться на петлях.

О том, в какую сторону движется шар, ничего определенного сказать нельзя. На высоте ветер постоянный, и относительно воздуха шар неподвижен – ветер его разгоняет до тех пор, пока шар не станет лететь со скоростью ветра. Значит, для пассажиров шара ветра нет, и флажок, прикрепленный к шару, будет провисать вне зависимости от того, движется ли куда-нибудь шар или нет.

■ ИСЧЕЗАЮЩИЙ КЛОУН («Квантик» №7)

Разгадка довольно проста. Если отбросить различный антураж и мишуру, мешающую ясно видеть происходящее, то суть сведётся к следующему. $14 \cdot 15$ камешков можно разложить на 14 рядов-«клоунов» по 15 камешков. Теперь выберем в левой кучке один верхний камешек, во второй – два верхних, и так далее. Это – части клоунов вне окружности. А теперь каждую такую часть передвинем в соседний ряд, получится 15 «клоунов» по 14 камешков! То есть загадка получилась довольно простой и даже бессмысленной: камешки из 14 кучек переразложили по 15 кучкам, откуда взялась новая кучка? «Камешки» в нашем случае достаточно маленькие и не сильно портят картинку – клоуны остаются похожими на клоунов, лишь у каждого добавляется какая-то деталь.

■ МОРОЖЕНОЕ («Квантик» № 7)

На рисунке к задаче про делёж мёда можно заметить, что банка с цифрой 9 перевёрнута. На самом деле в ней 6 кг мёда. Поэтому один может взять банки 1 и 6, другой – банки 3 и 4. У каждого окажется по 7 кг мёда.

Чтобы понять, почему следователь отпустил ребят, внимательнее разглядите предъявленную директором фабрики фотографию. Тени у деревьев есть, а у Вовы тени нет. Он что – привидение? Нет. Это значит, что его изображение вмонтировали в другую фотографию. А мороженое просто растаяло. Электричество отключили, вот холодильник и разморозился.

■ ИВАН-ЦАРЕВИЧ И КАЩЕЙ БЕССМЕРТНЫЙ («Квантик» № 7)

Сказка о дуэли

Как Ивану не погибнуть самому? Например, так: выпить перед дуэлью мёртвой воды из источника №1. Кащей даст Ивану яд из источника № 10, и он обезвредит яд, выпитый Иваном. Но как же победить самого Кащея? А надо дать ему обычной воды! Тогда выпитый Кащеем после дуэли яд из источника № 10 окажется не противоядием, как рассчитывал Кащей, а ядом, от которого нет противоядия.

Испытание

В первом случае Ивану достаточно назвать числа 100, 10, 1 – тогда загаданные Кащеем цифры просто будут идти подряд в трёхзначном числе, которое он назовёт Ивану.

Похожим образом можно поступить и во втором случае. Пусть сначала Иван назовёт одни единицы – тогда он узнает сумму загаданных чисел. Пусть эта сумма записывается числом, в котором n разрядов. Тогда каждое из загаданных Кащеем чисел меньше 10^n. Если теперь Иван назовёт числа 10^{9n}, 10^{8n}, ..., 10^n, 1, то загаданные числа будут идти в ответе Кащея просто друг за другом, быть может, дополненные нулями: первое число можно будет узнать, посмотрев на первые n разрядов, второе число – посмотрев на следующие n разрядов, и так далее.

■ ИГРАЕМ С ПОПУГАЕМ («Квантик» №7)

Надо, как несложно догадаться, переставить части слов так, чтобы получилась осмысленная фраза. А именно: «Гроза. Медленно яблоко падает».

■ КОРАБЛИ У ПРИЧАЛА («Квантик» №7)

Оказывается, сможет – см. рисунок.