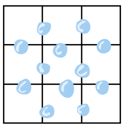
НАШ КОНКУРС («Квантик» №7)

31. Предположим, что верно последнее утверждение: «число N делится на 24». Но тогда N делится и на 2, и на 4, и на 12, то есть все утверждения верны, но это не так. Значит, число N всё же не делится на 24. Ситуация, описанная в задаче, возможна: например, когда $N=12$.

32. Можно считать, что кубик мы склеиваем последовательно: сначала склеиваем три «квадрата» $1\times3\times3$, а потом склеиваем их друг с другом. Чтобы склеить каждый такой «квадрат», потребуется 12 капелек (см. рис.). Значит, на три «квадрата» уйдёт $3\times12=36$ капелек. Ну и чтобы склеить их друг с другом, потребуется ещё $9+9=18$ капель (по 9 пар соседних граней для пары квадратов). Итак, всего получается $36+18=54$ капельки клея.



33. Ответ: 8 см.

Так как AD и BC равны и параллельны, то точка D лежит настолько же дальше от прямой l, чем точка A, насколько C лежит дальше от l, чем B. Значит, расстояние от D до l равно $4+(5-1)=8$ см.

34. При первом взвешивании положим на каждую чашу весов по две бронзовые и по одной серебряной медали. Если весы в равновесии, то эти шесть медалей настоящие, а фальшивая находится среди оставшихся: бронзовой, серебряной и золотой. Чтобы найти её, на одну чашу положим настоящую бронзовую и ещё не проверенную серебряную медали, а на другую – непроверенную бронзовую и настоящую серебряную. Если весы снова в равновесии, то понятно, что фальшивая медаль – золотая. Если же одна чаша легче другой, то на ней лежат настоящая и фальшивая медали, и последняя определена.

Рассмотрим случай, когда при первом взвешивании одна чаша оказалась легче другой. Тогда фальшивая медаль лежит на чаше, которая легче. Взвесим две бронзовые медали с этой чаши: если они одного веса, то фальшивая медаль – серебряная, а если они разного веса, то фальшивой будет более легкая.

35. Прочитаем последнее из данных нам чисел – 31131211131221 – немного необычным способом: *одна тройка, две единицы, одна тройка, одна единица, одна двойка, три единицы,* ... и так далее. Запишем все озвученные цифры подряд: 13211311123113112211. Это и будет следующее число в последовательности. Проверьте, что это правило работает для всех предыдущих чисел.

Оказывается, в записи чисел нашей последовательности никогда не встретится четверка! Попробуйте доказать.

СУПЕРГАЛАКТИЧЕСКИЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВОЗРАСТА («Квантик» №8)

Принцип работы определителя основан на том, что любое натуральное число представимо в виде суммы разных степеней двойки: 1, 2, 4, 8, ... (число 1 – это нулевая степень двойки). Например, $13=1+(1+1)+\ldots+(1+1)=1+(2+2)+(2+2)+(2+2)=1+4+(4+4)=1+4+8$ (мы заодно намекнули, как получать такое представление). Поэтому число 13 записано на трёх экранах: где одна звёздочка, четыре и восемь. И так для каждого числа от 1 до $1+2+4+8+16=31$ – их все угадывает наш определитель. Составьте определитель, который будет угадывать все числа от 1 до 63.

ТАЙНА ВЕНТИЛЯТОРА («Квантик» №8)

Рисунки, симметричные относительно любой оси, проходящей через центр вентилятора, соответствуют нулевому углу β, при этом тёмная зона больше, если лопасти повёрнуты сильнее. Значит, рисунок 3,а соответствует случаю 1, а рисунок 3,б – случаю 5.

Картинки, симметричные только относительно горизонтальной и вертикальной осей, соответствуют нулевому углу α. При этом изображение вентилятора более «сплюснутое», если он повёрнут сильнее. Значит, рисунок 3,в – это случай 4, а рисунок 3,г – случай 6.

Остались картинки, симметричные только относительно вертикальной оси.

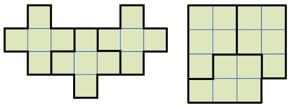
На рисунке 3,д угол α не меньше угла β – иначе тёмная зона распалась бы на две части; поэтому он соответствует случаю 7.

Рисунок 3,е получается из 3,д просто увеличением β, так как α у них одного знака (лопасти повёрнуты в одну сторону), и бóльшая часть тёмной зоны (лицевые стороны лопастей) у них сверху. Так что рисунок 3,е соответствует случаю 2.

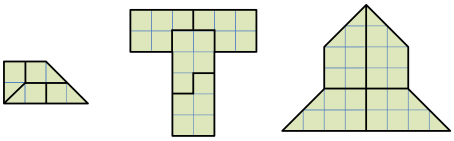
А рисунок 3, ж соответствует случаю 3 – он получается из рисунка 3,е симметрией относительно горизонтальной оси. Значит, в нём либо лопасти, либо сам вентилятор повёрнуты в другую сторону (то есть либо α, либо β другого знака).

ДАВАЙТЕ ПОРАЗРЕЗАЕМ («Квантик» №8)

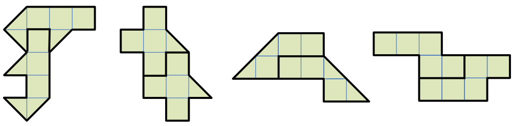
1.



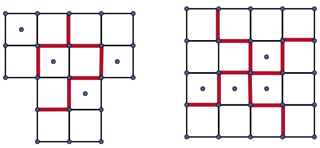
2.



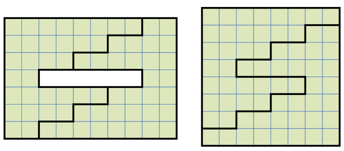
3.



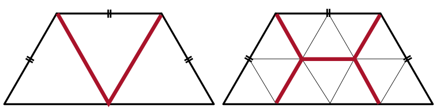
4.



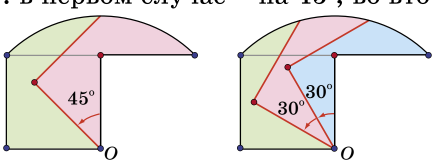
5. Площадь начального прямоугольника составляла $7 \times 10 = 70$, площадь вырезанной части $1 \times 6 = 6$, поэтому площадь полученной фигуры равна $70 - 6 = 64$. Поэтому квадрат должен быть со стороной 8 клеточек. Как разрезать прямоугольник – показано на левом рисунке, а как составить из этих частей квадрат – на правом.



6.



7. Фигурки, на которые разрезана исходная фигура, получаются одна из другой поворотом вокруг точки O: в первом случае – на 45°, во втором – на 30°.



ПОСЛЕ БАЛА («Квантик» №8)

Надо достать зёрнышко из мешка с надписью «Смесь» – ведь там теперь на самом деле зёрна одного вида. Если зёрнышко маковое, то это мешок с маком, а значит, в мешке с надписью «Просо» – не мак и не просо, то есть смесь, ну и в мешке с надписью «Мак» – просо. А если зёрнышко просяное, то в этом мешке просо, в мешке «Мак» – смесь, а в мешке «Смесь» – мак.

ЗАБАВНЫЕ ПАЛОЧКИ («Квантик» №8)

Несложно убедиться в том, что это просто другая форма записи умножения в столбик (запишите его рядом). Действительно, вертикальные столбики на картинке соответствуют разрядам (при перемножении разряды складываются), а число пересечений m и n палочек равно как раз mn.

ЛЕТНИЙ ТУРНИР ИМЕНИ А.П. САВИНА

1. Ответ: 1432.

В третьем тысячелетии такого года не было, так как к цифрам 2 и 0 можно добавить только 3 и 1, а ни 2013, ни 2031 год еще не наступил. В записи года второго тысячелетия первая цифра 1, поэтому остальные либо 0, 2, 3, либо 2, 3, 4. На втором месте требуется наибольшая цифра, поэтому берем 2, 3, 4. Расположив их после 1 в порядке убывания, получим искомый год.

2. Ответ: 1023/1024.

За каждый ход прибавляется число, меньшее единицы, поэтому целая часть числа не может увеличиться больше, чем на 1. Так как за 10 ходов из числа, меньшего 1, получили 10, то целая часть увеличивалась на 1 при каждом ходе. Число 10 можно за один ход получить только из $9\,{}^{1}/_{2}$, а его, в свою очередь, из $9\,{}^{1}/_{4}$ или из $8\,{}^{3}/_{4}$. Но раз целая часть всё время увеличивалась, предыдущее число было $8\,{}^{3}/_{4}$. Рассуждая аналогично, найдем последовательно все предыдущие числа: $7\,{}^{7}/_{8}$, $6\,{}^{15}/_{16}$, ..., $1\,{}^{511}/_{512}$, ${}^{1023}/_{1024}$.

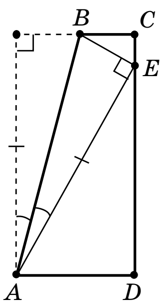
3. Ответ: тройку.

Так как каждая оценка увеличилась не более, чем на 1, то и среднее арифметическое тоже. Но оно осталось целым, а значит, увеличилось ровно на 1. Но тогда ровно на 1 увеличилась и каждая володина оценка. Поэтому ни 5, ни 1 у него не было. Так как у Володи есть 2 и 4, то среднее больше 2 и меньше 4, то есть равно 3.

4. Ответ: 9.

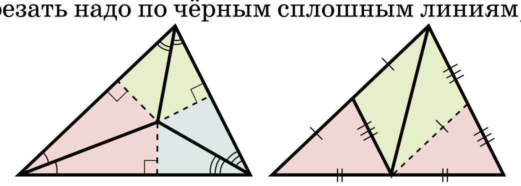
Заметим, что $9N = 10N - N$. Выполним это вычитание в столбик. Первая слева цифра результата – это разность второй и первой цифры числа N, затем идёт разность третьей и второй цифр, и так далее, а в конце – разность 10 и последней цифры. При суммировании всё сократится, кроме 10. Но предпоследняя цифра $9N$ на самом деле на 1 меньше (перенос 1 при вычитании в столбик последней цифры из 0), поэтому и ответ $10 - 1 = 9$.

5. Имеем прямоугольник со сторонами 2 и 1.



Пусть $ABCD$ – четырехугольник, получившийся в итоге, E – вершина прямоугольника, попавшая при втором складывании на сторону CD (см. рис.). Тогда в треугольнике EAD катет AD в два раза меньше гипотенузы AE, следовательно, угол EAD равен 60°, а искомый угол является половиной угла, дополняющего угол EAD до угла прямого, то есть $(90^\circ - 60^\circ) : 2 = 15^\circ$.

6. Примеры разрезания показаны на рисунках (резать надо по чёрным сплошным линиям).



7. Положим в кучки 1, 3, 5, 7, ..., 19 орехов. Разбив любую кучку из нечётного числа орехов на две, в одной из частей получим меньшее нечётное число орехов, что и даст совпадение.

8. Разделим доску на две половинки 4×5. Слонов на полях одного из цветов (скажем, чёрного) не более трёх, из них на одной из половинок (скажем, левой) – не более одного. Отметим четыре чёрных поля в двух левых столбцах. Слоны из другой половинки этих полей не бьют, а один слон с данной половинки все 4 поля тоже не побьёт. Итак, есть «небитая» клетка. Туда и поставим восьмого слона.

9. Ответ. Вася.

Разобьём числа на пары: (1, 2), (3, 4), ..., (199, 200). Вася перекладывает число из той же пары, что и Петя перед этим. После пары ходов число монет в петиной кучке меняется на 1. Так как пар ходов не более 100, то число монет в петиной кучке после любого хода Васи, кроме 100-го, положительно, то есть каждый ход Васи возможен.

10. Если упорядочить камни по весу, то при любом испытании прибор выберет два из трёх средних камней. Удалив один камень из показанных в первом испытании, узнаем остальные два средних. Теперь три раза удаляем камни не из тройки найденных средних. Тот камень, который войдёт в каждую из трёх пар – самый средний.

11. Рассмотрим шахматную раскраску квадрата. Заметим, что каждый раз здороваются гномы, стоящие на полях разного цвета. Разобьем гномов на 8 групп: ЧЧЧ, ЧЧБ, ..., БББ (в группу, например, ЧЧБ входят гномы, которые в первые два раза стояли на черных полях, а третий раз – на белом поле). Гномов больше, чем групп, поэтому в какой-то группе есть не меньше двух гномов. Они и не здоровались.

12. Ответ: можно.

Одновременно зажжём одну большую свечу и одну маленькую. Когда маленькая догорит, зажжём следующую маленькую и т. д. В тот момент, когда погаснет пятая маленькая свеча, зажжём сразу две маленькие и погасим их одновременно с тем, как погаснет большая свеча. Тем самым мы получим два огарка, каждый из которых рассчитан на 6 минут. Теперь зажжём новую маленькую свечу и вместе с этим последовательно, один за другим, эти два огарка. Одна минута – это промежуток времени между моментом, когда догорит маленькая свеча, и моментом, когда догорит второй огарок.

13. Ответ: 6.

Пример. Числа на карточках идут в таком порядке: 7, 1, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 11, 5, 12, 6. *Оценка.* Если истинных утверждений больше 6, то ложных – меньше 6. Но тогда все карточки с числами от 6 до 12 «лгут», поэтому ложных – больше 6. Противоречие.

14. Ответ: хватит.

Пусть рядом с Артуром не сидели жители A, B и C. Заметим, что сидевший напротив Артура сидел рядом с каждым из двух других, а каждый из остальных – только рядом с одним. Это означает, что если каждого из них спросить про каждого, то сидевший напротив Артура ответит оба раза «Да», если он рыцарь, и оба раза «Нет», если он лжец. Двое других в этом случае дадут один раз ответ «Да» и один раз ответ «Нет» (независимо от того, рыцари они или лжецы).

Пусть, например, Артур спросит *A* про *B* и *C*, а затем *B* – про *A* и *C*. Если кто-то из них на оба вопроса ответит одинаково, то он и сидел напротив Артура, иначе напротив Артура сидел *C*.

ДЕЛО ОБ ОТРАВЛЕННОМ ВИНЕ
(«Квантик» №8)

Четырьмя бокалами можно обойтись, если каждый раз уменьшать число подозрительных бутылок в два раза (или почти в два раза, если всего бутылок нечётное количество). А именно, нальём в первый бокал вино из первых семи бутылок и добавим в него спецвещество. Если смесь станет фиолетовой, то отравленное вино в первых семи бутылках, иначе – в оставшихся восьми. Дальше действуем аналогично. Скажем, во втором случае берём четыре из восьми подозрительных бутылок и отливаем вина из каждой во второй бокал. С помощью спецвещества выясняем, где отрава – в этих четырёх бутылках или в оставшихся четырёх. И так далее.

Но можно обойтись и всего одним бокалом: сначала налить в него спецвещество, а потом доливать вино из бутылок по очереди. Та бутылка, после добавления вина из которой смесь в бокале станет фиолетовой, и будет с отравленным вином.