ДЕНЬ ВЫБОРОВ!

Вера Катякова, Илья Думанский

Уставшие ученики 7 «В» класса сидели в кабинете уже не первый час и решали, в какой же лагерь поехать на зимние каникулы. Было бы так просто, если бы вариант был один – ничего не пришлось бы решать! Но у ребят был выбор из 4 вариантов. И желание решить всё по справедливости.

– Ладно, хватит! Каждый уже понял, куда хочет отправиться. Так что давайте голосовать! – закричала Наташа, самая нетерпеливая. Класс согласно загудел.

– Хорошо, давайте! – решил староста класса Саша. – Пусть каждый выпишет лагеря на листочек в порядке предпочтения: сначала самое желанное место, потом менее желанное, а на последнее место – куда вообще не хочется. Потом разберусь с этими бумажками.

– Зачем такие сложности, – буркнула Наташа, но бурно выражать протеста всё-таки не решилась.

Класс пустел, ученики заполняли бумажки и расходились. В конце осталось только 4 ученика: Наташа, Лена, Витя и староста Саша. Каждый из них предложил свой вариант, а потому хотел лично убедиться, что голоса будут подсчитаны верно. Разложив бумажки по кучкам, ребята собрали результат в одну таблицу, для краткости обозначив лагеря буквами.

10 человек:	$A \succ D \succ C \succ B$
10 человек:	$B \succ C \succ D \succ A$
8 человек:	$C \succ D \succ B \succ A$
6 человек:	$A \succ D \succ B \succ C$

– Ну что тут решать? Видно же, что 16 человек хотят в A! Большинство хочет в A – едем в A, – закричала Наташа, обрадованная, что её вариант победил.

– Не торопись, – Саша осадил Наташу. – Какое-то большинство у тебя относительное, у нас в классе 34 человека, за твой вариант – меньше половины!

– И что ты предлагаешь? – фыркнула Наташа.

– Я предлагаю поступить, как поступают на выборах президента, голосовать в два тура.

– Это как же?

– Раз никто не набрал абсолютного большинства голосов сразу, тогда возьмём два самых популярных варианта и оставим только их. У нас это варианты A и B с результатами 16 и 10 голосов соответственно. – Саша подошёл к доске и стёр варианты C и D, осталась таблица:

10 человек:	$A \succ B$
10 человек:	$B \succ A$
8 человек:	$B \succ A$
6 человек:	$A \succ B$

– Вот, тут уже всё просто: за A 16 человек, за B – 18. И это абсолютное большинство класса! – Саша торжествовал.

– Не нравится мне ваши подходы, ребята, – сказала Лена, – политику я не люблю и не понимаю. Давайте сделаем как в спорте!

– Это как? – переспросила Наташа.

– Это очень просто, – заторопилась Лена, которая очень любила спорт и чтобы всё было просто, – сначала восстановим таблицу. Теперь смотрите внимательно! Если вариант стоит на последнем месте по мнению ученика, то лагерь получает от проголосовавшего 0 очков, если на третьем, то одно, если на втором, то два, а если на первом – три.

– Так, тогда голоса из первой кучки дают A 30 очков, D – 20, C – 10, а B не получает ничего, – посчитала Наташа, – странный ты способ выбрала: твой вариант только на втором месте!

– Не торопись, Наташа, это ещё только первая строчка, – подал голос Витя, – вторая и третья строчка не приносят твоему варианту ни балла, хотя в четвёртой набирается 18. Итого – 48.

– Так, теперь за B, – начал считать Саша, – из первой строчки ничего нет, из второй – 30, из третьей – 8, из четвёртой – 6, всего 44. Ещё меньше.

– А вот C получает 10 баллов из первой строки, 20 из второй, 24 из третьей, а из последней – ничего, – начал рассуждать Витя.

– Итого 54, – закончила Лена за него, – тогда как у моего варианта D аж 58.

– Да ну? – ребята недоверчиво смотрели на таблицу, каждый считал про себя.

– Какой-то плохой способ, – подвел итог Витя.

– А что ты предложишь? – спросила Наташа.

– Ну, смотрите. Я за C, вы знаете. Давайте сравним его с A, – Витя стёр остальные варианты, получилась таблица:

10 человек:	$A \succ C$
10 человек:	$C \succ A$
8 человек:	$C \succ A$
6 человек:	$A \succ C$

– Смотрите, 18 человек считает, что C лучше A, – абсолютное большинство! Теперь сотрём A и вернем B.

На доске таблица приобрела новый вид:

10 человек:	$C \succ B$
10 человек:	$B \succ C$
8 человек:	$C \succ B$
6 человек:	$B \succ C$

– 18 человек считают, что C лучше B! Абсолютное большинство опять-таки, – Витя уже стирал B и писал D, – и вот, осталось сравнить C с D!

10 человек:	$D \succ C$
10 человек:	$C \succ D$
8 человек:	$C \succ D$
6 человек:	$D \succ C$

– Значит, C лучше A, лучше B, лучше D – лучше всех!

Ребята переглянулись и замолчали. Стало ясно, что они не могут выбрать ни одного варианта. Только теперь они заметили в дверях Илью, старшеклассника, который иногда помогал им с математикой. Увидев Илью, ребята обратились к нему за помощью, так как сами они не знали, как им поступить. Выслушав ребят, Илья воскликнул:

– Вы затронули очень интересную тему! Давайте разберёмся. Как вы верно заметили, подсчёт голосов и подведение итогов любых выборов можно проводить разными способами. Первый метод, который был предложен Наташей, называется *правило относительного большинства*. Всё просто: каждый избиратель голосует за одного из кандидатов, а набравший наибольшее количество голосов побеждает.

– Видите! – перебила Наташа. – Мой метод самый лучший!!

Илья продолжил:

– Не торопись. Далее, Саша предложил *правило абсолютного большинства*. Каждый избиратель голосует за одного из кандидатов. Если есть кандидат, на-

бравший более 50% голосов, он побеждает, если нет, то два наиболее успешных кандидата проходят во второй тур, где устраивается новое голосование. Там поправилу относительного большинства и выбирается победитель. Потом Лена предложила ещё более интересную систему – *метод Борда*. Каждый избиратель ставит ноль очков самому «нелюбимому» кандидату, 1 очко кандидату, находящемуся на предпоследнем месте в системе его индивидуальных предпочтений, 2 очка тому, кто на третьем месте с конца, и так далее. Затем очки каждого кандидата суммируются, и побеждает кандидат, набравший большее количество очков. И, наконец, метод, предложенный Витей, – *метод Шульце*. Подсчитывается, например, сколько избирателей считают, что A лучше B, а сколько – что B лучше A. Если больше первых, то признаётся, что A лучше B (или наоборот). Такой подсчёт проделывается с каждой парой, победителем считается кандидат, признанный лучше всех остальных.

– Это очень интересно, что победитель по одному методу не всегда является победителем по другому! – сказала Лена.

– Ты права! Этот факт сам по себе является интересным. Его впервые заметил французский философ, математик, академик и политический деятель Мари́ Жан Антуа́н Кондорсе́ (1743–1794) в 1785 г. В его честь он и назван – *парадокс Кондорсе*.

– И что делать? Ерунда какая-то получается, – расстроилась Наташа.

– Да ладно, ещё не такое бывает, – сказал Илья, – вот помню, однажды мы с нашей командой по хоккею выбирали капитана. Нас было трое кандидатов: A, B и C. Мы решили подсчитывать голоса по правилу относительного большинства. И изначально голоса распределились так: 6 голосов за A, 6 голосов за B и 9 – за C.

A – 6 человек
B – 6 человек
C – 9 человек

Мы уже собрались признавать C победителем, но тут к нам ворвался D и сообщил, что он проспал! Мы поругали его, но делать нечего! Пришлось переголосовать. Причём D удалось переманить на свою сторону одного человека, ранее поддерживавшего кандидата A, и четырёх бывших сторонников кандидата C.

Значит, теперь голоса распределились так:

A – 5 человек
B – 6 человек
C – 5 человек
D – 5 человек

Победитель – B!

– Ничего себе! – воскликнул Витя. – То есть, вступив в борьбу, кандидат D отобрал голоса у лидера и тем самым обеспечил победу кандидату B, который до этого был очень далёк от неё!

– Да, – продолжил Илья. – А хотите, приведу пример с вашими выборами?

– Конечно! – сказала Наташа. – Это было бы интересней.

– Представьте, ребята, что вы решили проводить ваши выборы по системе

абсолютного большинства. Тогда, как уже было подсчитано Сашей, побеждает B. Но тут пришла ваша учительница, Вера Александровна, и сообщила, что лагерь A закрылся и туда нельзя поехать. Тогда голоса всех ребят уже выглядели бы так:

10 человек: $D \succ C \succ B$
10 человек: $B \succ C \succ D$
8 человек: $C \succ D \succ B$
6 человек: $D \succ B \succ C$

Заметим, что теперь в первом туре B получит 10 голосов, C – 8, а D – 16. Во второй тур проходят B и D. Там голоса распределятся так:

10 человек: $D \succ B$
10 человек: $B \succ D$
8 человек: $D \succ B$
6 человек: $D \succ B$

Теперь уже победителем станет D!

– Удивительно! – воскликнула Лена – никогда бы не подумала, что если кандидат, проигрывающий выборы, откажется от участия в них, то это может повлиять на победителя! Здорово! А есть ещё какие-нибудь примеры?

– Много разных… Однажды мы выбирали старосту нашего класса. Выборы шли по правилу абсолютного большинства. И были там у нас две подружки, которые участвовали в выборах и в подсчёте голосов. Изначально мы собирались проголосовать так:

6 человек: $A \succ B \succ C$
5 человек: $C \succ A \succ B$
4 человек: $B \succ C \succ A$
2 подружки: $B \succ A \succ C$

Несложно проверить, что во второй тур проходят кандидаты A и B с результатом по 6 голосов у каждого, а во втором туре побеждает кандидат A (11 голосов против 6).

Однако эти подружки, узнав, что кандидат, за которого голосовали они, не победит, решили поддержать победителя, чтобы не портить с ним отношений с самого начала. Прямо перед голосованием они поменяли своё решение в пользу кандидата A. Ставя его на первое место, девочки были уверены, что увеличивают шансы кандидата A на победу. Теперь распределение голосов было таким:

6 человек: $A \succ B \succ C$
5 человек: $C \succ A \succ B$
4 человек: $B \succ C \succ A$
2 подружки: $A \succ B \succ C$

В первом туре A наберёт 8 голосов, B – 4 голоса, а C – 5 голосов. Во второй тур пройдут кандидаты A и C, где A наберёт 8 голосов, а C – 9!

Таким образом, намереваясь помочь кандидату A выиграть, эти девочки, напротив, лишили его победы! Не поменяй они своего мнения и проголосуй они за кандидата B, как изначально хотели, победителем стал бы как раз кандидат A. Ведь раньше они своими голосами продвигали во второй тур B, более слабого соперника, чем C.

– Это всё интересно, конечно, но нам-то что делать? – спросил Витя.

– А давайте свою систему придумаем, – предложила неугомонная Наташа.

– Да, справедливую и разумную! – поддержала Лена.

– Отличная идея, – сказал Илья, – вносите предложения! Какими правилами (или, если говорить математически, аксиомами) должна обладать такая система, чтобы быть справедливой?

– Хотелось бы, чтобы наша система по итогам голосования как-то упорядочивала кандидатов. Причём если все избиратели считают, что А лучше В, то и в итоге должно получиться, что А лучше В.

– Логично! Это условие называется *принципом единогласия*, – подбодрил Илья.

– Мне ещё не понравилось, что сейчас у нас, если А вычеркнуть, то победитель по правилу абсолютного большинства изменится. Надо как-то этого избежать, – сказала Наташа.

– То есть, если А лучше В, то нужно, чтобы это не зависело от того, появляются ли новые кандидаты или, наоборот, выбывают, – продолжил Витя.

– И вообще, если все избиратели как-то поменяют свои предпочтения, но насчёт того, кто из А и В лучший, останутся при своём мнении, то и наша система должна после этого лучшим из А и В признавать того же, кого и раньше.

– Правильно. Это называется *независимостью от посторонних альтернатив*. Ещё, я думаю, что в такой идеальной системе не должно быть человека, мнение которого определяло бы результат выборов, независимо от мнения всех остальных, – предположил Илья.

– Конечно, – согласился Саша, – Иначе это уже диктатура получается!

– Точно. С первого взгляда кажется, что каждое из этих трёх требований обязательно, и если убрать любое из них, система перестанет быть демократичной. Однако американский экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике Кеннет Эрроу (1921 г.р.) в 1951 году доказал теорему, которая после некоторых доработок в 1963 году выглядит так: если в выборах участвует более двух кандидатов, то не существует системы, удовлетворяющей всем трём правилам! Этот факт имеет сложное математическое доказательство и носит название *теорема Эрроу*.

– То есть, по справедливости не получится? – подвела итог Наташа.

– Не получится, – подтвердил Илья, – всегда будет недовольная сторона.

Ребята переглянулись, никто не знал, что делать, все понимали бессмысленность дальнейших разговоров. В этот момент в класс вошла Вера Александровна.

– Вы ещё здесь! – удивилась она. – Судя по грустным лицам, так и не решили, куда ехать. Тогда у меня для вас хорошая новость – мы едем в А, потому что в остальных лагерях недостаточно места для нашего класса.

– Ладно, с этим не поспоришь, – буркнул Витя. – Вот тебе и демократия – диктатура и только....

– Да ладно тебе, я уже думал, придётся тянуть жребий, – признался Саша.

Ребята собрали вещи и вышли из класса.

Художник Виктор Пяткин