ДЮЖИНА ЗАДАЧ О СРЕДНЕМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ

1. Сумма всех 20 чисел равна 210, поэтому среднее арифметическое равно $210/20 = 10{,}5$.

2. Тут 19 отрицательных чисел, 20 положительных и ноль, всего 40 чисел. При суммировании все числа, кроме 0 и 20, попарно сокращаются. Значит, среднее арифметическое равно $20/40 = 0{,}5$.

3. Здесь удобно сгруппировать числа в пары: 1 и 1000, затем 2 и 999 и так далее. Получится 500 пар, последняя будет 500 и 501. В каждой паре сумма составляет 1001 и среднее равно 500,5. Поэтому и среднее всех чисел равно 500,5 (подумайте, почему).

4. Сначала среднее арифметическое трёх чисел было равно 11, т.е. их сумма равнялась 33. Затем среднее четырёх чисел было равно 14, т.е. их сумма равнялась 56. Значит, вошедшему было $56 - 33 = 23$ года.

5. Пусть, скажем, $a < b$ (случай $a > b$ рассматривается аналогично). Искомая координата x должна удовлетворять пропорции $(x - a):(b - x) = 3:5$, откуда получаем уравнение $5(x - a) = 3(b - x)$, $5x - 5a = 3b - 3x$, $8x = 5a + 3b$, $x = \frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b$.

6. Да, например, если этот школьник был самым низким в 7 «А», но оказался самым высоким в 7 «Б». Вообще, такое происходит, если школьник был ниже среднего роста в 7 «А» и выше среднего роста в 7 «Б».

7. Такой способ годится, только если во всех классах поровну учеников. Пусть, скажем, в классе А учатся 25 школьников, а в классе Б учатся 29 школьников и средние арифметические в этих классах равны a и b. Тогда сумма всех годовых оценок в классе А равна $25a$, а в классе Б равна $29b$. Сумма всех оценок в двух классах равна $25a + 29b$, и это надо разделить на $25 + 29 = 54$. Поэтому средняя оценка всех семиклассников равна $\frac{25a+29b}{54} = \frac{25}{54}a + \frac{29}{54}b$, а не полусумме a и b. Это число называют *взвешенным средним* чисел a и b.

8. Если 1/10 самых богатых жителей города имеют доход в 15 раз больше среднего, то их общий доход в полтора раза больше суммарного дохода всех жителей города, включая их самих.

9. Так как все строки содержат поровну элементов, то среднее арифметическое всех чисел таблицы равно $(a + b + c)/3$. По аналогичным причинам оно равно $(d + x)/2$, где x – неизвестное среднее арифметическое во втором столбце. Отсюда $x = \frac{2}{3}(a + b + c) - d$.

10. Нет, поскольку тогда среднее арифметическое всех чисел таблицы окажется положительным и отрицательным одновременно.

11. Если раскрыть скобки в произведении $(1 + 2 + \ldots + 8 + 9)(1 + 2 + \ldots + 8 + 9)$, то получится как раз сумма всех чисел таблицы, поэтому она равна 45^2, а среднее равно $45^2/9^2 = 5^2 = 25$. Можно пытаться объяснить этот ответ по-простому: средний сомножитель (среднее арифметическое чисел от 1 до 9) равен 5, и потому среднее произведение равно 25. Но это опасная логика: так можно решить, что среднее чисел $1^2, 2^2, \ldots, 9^2$ равно 5^2, а это совсем не так.

12. Докажем, что $a_i \leqslant i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Для этого рассмотрим числа $b_i = a_i - i$. Два крайних (b_1 и b_{100}) равны нулю, а каждое из остальных не больше полусуммы соседей. Надо доказать, что среди b_i нет положительных. Пусть это не так и пусть наибольшее из них b_k. Оно не может быть крайним, так как с краёв нули, поэтому оно равно полусумме соседей. Соседи не могут быть больше b_k и, значит, равны b_k: рядом с наибольшим стоят тоже наибольшие. Двигаясь к краю, получаем противоречие.

ПЕРВОЕ ИЗОБРЕТЕНИЕ ДЯДИ ЮРЫ

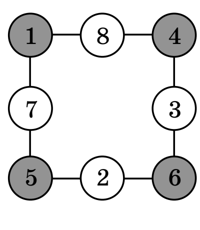
Итак, рассуждал Петя, дядя Юра предложил искать жучки, которых нет. То есть жучком должен стать кто-то, кто у нас уже есть. Что у нас вообще есть в ситуации с кодовым замком? Дверь есть, ручка на ней. Жильцы, которые в неё часто заходят. Наконец, есть сам замок, а он состоит из кнопочек и металлической пластинки. Жилец подходит, кнопки нажимает и заходит... Точно, кнопки! Жильцы ведь всегда нажимают на одни и те же кнопки! То есть надо просто найти потемневшие (или, наоборот, отполированные) или проседающие кнопки – вот и решение.

Ну, со второй задачкой теперь немудрено справиться. Надо найти то, что взаимодействует с посетителями. Пожалуй, это экспонаты и пол. Экспонаты от долгого смотрения на них не сильно меняются, а вот пол... Он наверняка будет грязнее там, где посетители чаще ходят. Но что делать, если на улице чисто? Если грязи нет, её можно принести – дурное дело нехитрое. Например, песочку у входа насыпать.

Можно идти к дяде Юре за второй порцией!

МЕНЬШЕ ЗНАЕШЬ – КРЕПЧЕ СПИШЬ

Такое расположение существует, и оно – единственное (см. рисунок). Как его найти? Вот краткое описание рассуждений.



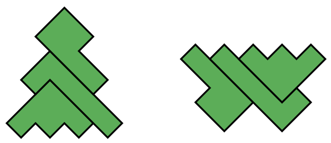
Так как расположения, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях, считаем одинаковыми, то следует ограничиться теми, у которых восьмёрка стоит не в углу (вариант, когда она в углу, исчерпывающе «проработал» Олег), а в середине стороны, для определённости – верхней (т.е. в обозначениях, введённых нами, Б = 8). В одной строке с восьмёркой могут находиться либо единица с четвёркой, либо двойка с тройкой (ибо $8+1+4=8+2+3=13$). Рассмотрим оба варианта:

1) Пусть это числа 1 и 4. Пусть для определённости А = 1 и В = 4 (а если наоборот, получим зеркальное отражение, что нового решения не даёт). Так как сумма чисел в левой вертикали равна 13, то Ж + И = 12. Поэтому Ж = 5, И = 7 или наоборот. Если Ж = 5, то, вспомнив, что по уже доказанному в статье сумма чисел в серых кружочках равна 16, получаем Д = 6. Остальные числа определяются автоматически, и мы получаем приведённый выше ответ. Ну, а если Ж = 7, то Д = 4, что недопустимо, поскольку В = 4.

2) Пусть это числа 2 и 3. Для определённости положим А = 2 и В = 3. Так как сумма чисел в левой вертикали равна 13, то Ж + И = 11, что может быть представлено (исключая использованные уже числа) как $11=4+7=5+6$. Аналогично для правой вертикали Г + Д = 10, что представляется единственным способом: $10=4+6$. Отсюда моментально следует, что в левой и правой вертикалях имеются одинаковые числа (либо 4, либо 6), что недопустимо. Так что этот случай решений не даёт.

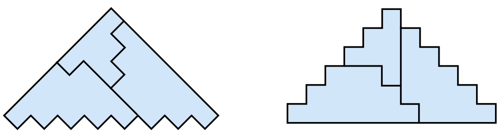
ГОЛОВОЛОМКИ

Головоломка «Времена года»



Ёлочка и бабочка

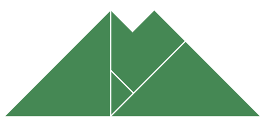
Головоломка «Чичéн-Ицá»



Внешний вид этих фигур напоминает очертания храма Кукулькана из Чичен-Ицы

Головоломка «Эйяфьядлайёкюдль»

Вулкан до извержения



Вулкан после извержения

НОВОГОДНЯЯ ИСТОРИЯ

• Баба Яга может собрать с грядок 85 поганок. Сначала на грядках растут $16 \cdot 4 = 64$ поганки.

Когда Баба Яга сорвёт 4 поганки, вырастет ещё одна. Получается, что количество собранных поганок увеличилось на 4, а количество поганок на грядках уменьшилось на 3. Когда Баба Яга проделает эту операцию 20 раз, у неё будет собрано $20 \cdot 4 = 80$ поганок, а на грядках будет $64 - 20 \cdot 3 = 4$ поганки. Когда Баба Яга соберёт 4 оставшиеся поганки, вырастет ещё 1 поганка. Всего получается $80+4+1=85$ поганок.

• Лиза посоветовала выйти на улицу и посмотреть в зал через окошко. Дело в том,что зимой окошки запотевают со стороны тёплого помещения, и Павлик никак не мог протереть окошко снаружи. Торт съел Павлик.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА

1. Если бы требовалось, чтобы в каждой строке были расположены числа от 1 до 5, подошла бы такая расстановка:

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

В условиях нашей задачи следует все числа третьей и четвёртой строки увеличить на 2, а числа пятой строки – на 3.

2. Ответ: 2012.

Если число при выполнении операций хотя бы один раз делили на 100, то оно от этого очень сильно уменьшилось. Число может избежать такого уменьшения, только если, вычитая из него единицу 87 раз, мы ни разу не получим кратное 100 число. Очевидно, число 2099 – самое крупное такое число среди данных. Из него-то после 87 операций и получится самое крупное число $2099-87=2012$.

3. При поездке туда и обратно машина дважды проезжает по любому отрезку пути. Если посадить между двумя дубами ёлку, то, проезжая этот отрезок в одну сторону, Гарри телепортируется сквозь одну часть этого отрезка, а на обратном пути – сквозь другую. Таким образом, в сумме этот отрезок Поттер проедет всего один раз. В обычных условиях Поттеру на поездку требуется 4 часа. Чтобы уложиться в 3 часа, ему потребуется сократить путь на четверть, для чего достаточно посадить ёлки на отрезки суммарной длины хотя бы в половину от всего пути. Таким образом, можно посадить ёлки на 6 самых крупных отрезков.

4. Докажем, что каждое Костино слово встречается у Влада. Рассмотрим любое Костино слово x.

1) Так как оно похоже на слово РАБ, то оно похоже и на слово БАРС.

2) Так как оно похоже на слово КАРА, то оно похоже и на слово БАРКАС.

3) Оно похоже на слово БАРАБАС. Может ли оно при этом быть непохожим на слово КАРАБАС? Тогда оно похоже на БАРАБАС не из-за букв А, Р и С (в КАРАБАСе их столько же), значит, из-за Б. Значит, в слове x две буквы Б, а буквы К и С встречаются не по одному разу. При таком наборе свойств слово x может быть похоже на слово РАБ, только если в нем есть одна буква А. Тогда оно не похоже на слово КАРА. Противоречие. Выходит, что слово x похоже и на слово КАРАБАС тоже. Значит, действительно, каждое Костино слово выписано также и Владом. Значит, у него не меньше слов, чем у Кости.

5. Ответ: автобусы встретились в 400 км от A.

Условие задачи можно изменить следующим образом:

Из городов А и В выехали навстречу автобусы с одинаковой постоянной скоростью. Если автобус из А выезжает на 3 часа раньше, чем второй, они встретятся на расстоянии 500 км от А. Если на 3 часа раньше выедет автобус из В, а не из А, то они встретятся на расстоянии 300 км от А. Где встретятся выехавшие одновременно автобусы?

При таком условии очевидно, что в первых двух случаях автобусы встретятся в точках, симметричных относительно середины пути. Значит, середина эта находится на расстоянии $(500+300)/2=400$ км от A. Но это и есть точка встречи одновременно выехавших автобусов!

6. Будем ехать по городу, уезжая с каждого перекрестка вверх или вправо. В любой точке (кроме конечного пункта) по условию запрещено максимум одно из этих направлений, значит, так ехать всегда получится. Тогда при перемещении от одного перекрёстка к другому каждый раз уменьшается на 1 сумма расстояний по вертикали и горизонтали до конечного пункта. Поэтому через 20 «ходов» эта сумма расстояний станет равной нулю, то есть мы приедем в правую верхнюю точку.

7. а) В первой и второй строке написано по 90 чётных и 90 нечётных чисел. Так как произведения в третьей строке – это тоже последовательные числа, среди них тоже ровно 90 чётных и 90 нечётных. В нечётных произведениях оба сомножителя должны быть нечётными. Отсюда следует, что в первых двух строках под чётным числом обязательно стоит чётное, а под нечётным – нечётное. Но тогда все чётные произведения делятся на 4, чего в множестве 180 последовательных чисел не может быть (если число x делится на 4, то число $x+2$ чётно, но не делится на 4).

б) Среди 180 последовательных натуральных чисел ровно 60 делятся на 3, а остальные 120 не делятся на 3. По признаку делимости на 3 натуральное число делится на 3 в том и только в том случае, когда его сумма цифр делится на 3. Значит, в первых двух строках написано по 60 чисел, делящихся на 3, и по 120 чисел, не делящихся на 3. При этом в третьей строке имеется тоже ровно 60 чисел, делящихся на 3, и 120 не делящихся. Аналогично пункту **а)** получаем, что в третьей строке нет чисел, делящихся на 3, но не на 9. А такого не может быть для 180 последовательных чисел. Это же рассуждение работает и в пункте **а)**.

8. Ответ: Борис Михайлович (далее – Б.М.) приедет на дачу через 5 часов после второго заявления навигатора.

Когда Б.М. проехал половину пути, навигатор заявил, что осталось ехать 1 час. Следовательно, первую половину пути Б.М. проехал за 1 час. Когда Б.М. проехал три четверти пути, навигатор заявил, что осталось ехать 2 часа, т.е. в этот момент навигатор полагал, что «Лексус» едет с такой скоростью, что на преодоление четверти пути ему требуется 2 часа. Но тогда на преодоление трех четвертей пути понадобится 6 часов. Таким образом, второе заявление навигатора было сделано через 6 часов после начала движения, и, следовательно, через 5 часов после первого заявления. Значит, на преодоление четверти пути (промежуток между первым и вторым заявлением) «Лексусу» потребовалось 5 часов. Поскольку дальнейшее движение будет происходить с той же скоростью, на преодоление последней четверти пути понадобится ещё 5 часов.

НАМ ПИШУТ

1. Основания малых трапеций 1/8 и 5/8.

2. Не всякую. Равнобедренную трапецию можно разрезать таким образом на четыре равные прямоугольные трапеции, только если её малое основание больше, чем треть большого основания.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

Если вы получили по почте или приобрели бракованный номер (с дублированными или пустыми страницами, расплывшимся текстом и т.п.), напишите или позвоните нам, и мы постараемся обменять этот номер на новый.