Александр Шень

ДЮЖИНА ЗАДАЧ

о среднем арифметическом

Если девяти школьникам дать сто конфет, то хотя бы один из них получит 12 конфет или больше.

Почему? Рассуждаем «от противного». Если это не так, то каждый из 9 школьников получил 11 конфет или меньше. Тогда всего они получили не более $9 \cdot 11 = 99$ конфет, а не 100. Противоречие – значит, так быть не может.

По существу то же самое рассуждение можно изложить иначе. Если 9 школьников получили 100 конфет, то в среднем на каждого школьника пришлось по $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ конфет, и потому хотя бы один должен был получить больше 11 конфет.

Что означают здесь слова «в среднем»? Речь идёт о *среднем арифметическом*. Среднее арифметическое двух чисел a и b равно их полусумме $(a + b)/2$, среднее трех чисел a, b, c равно $(a + b + c)/3$, и так далее: среднее арифметическое n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно сумме всех чисел, деленной на их количество, т.е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

В нашем примере $n = 9$ (девять школьников), $a_1, a_2, \ldots, a_9$ – количества конфет, полученных каждым из них, общее число конфет $a_1 + a_2 + \ldots + a_9$ равно 100, и среднее равно $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$.

Среднее арифметическое можно объяснить так: если мы хотим уравнять все числа, не меняя их суммы, то каждое из них надо заменить средним арифметическим.

Задачи

1. Найдите среднее арифметическое чисел

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 19, 20.$$

2. Найдите среднее арифметическое чисел

$$-19, -18, -17, -16, \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20.$$

3. Найдите среднее арифметическое всех целых чисел от 1 до 1000.

Впервые опубликовано в журнале «Квант», № 6 за 2008 г.

4. Когда в комнату вошёл четвёртый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 лет до 14. Сколько лет вошедшему?

5. Среднее арифметическое чисел a и b делит пополам отрезок с концами a и b на числовой оси. Найдите координату точки, которая делит этот отрезок в отношении $3:5$.

6. Одного из школьников 7 «А» класса перевели в 7 «Б», отчего средний рост школьников в обоих классах (7 «А» и 7 «Б») увеличился. Могло ли так быть?

7. Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех семиклассников, завуч попросил учителей математики седьмых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и потом взял среднее арифметическое этих оценок. Прав ли он?

8. Говорят, что средний доход 10% самых богатых жителей города в 15 раз превосходит средний доход всех жителей города. Докажите, что это выдумки.

9. В прямоугольной таблице из трёх строк и двух столбцов средние арифметические в трёх строках равны a, b, c, а среднее арифметическое в первом столбце равно d. Найдите среднее арифметическое всех чисел таблицы и среднее арифметическое во втором столбце.

10. Может ли среднее арифметическое каждого столбца прямоугольной таблицы быть положительным, а среднее арифметическое каждой строки – отрицательным?

11. Таблица умножения на обороте школьной тетради содержит все произведения однозначных чисел от 1 до 9 (всего 81: сначала 1 умножается на все числа от 1 до 9, потом 2 и т.д.). Найдите среднее арифметическое всех произведений в таблице.

12. В строчку написаны сто чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, при этом $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$ и каждое число в строчке (кроме двух крайних) не больше среднего арифметического двух соседей: $a_2 \leqslant (a_1 + a_3)/2$, $a_3 \leqslant (a_2 + a_4)/2$ и так далее. Докажите, что $a_{43} \leqslant 43$.

Художник Леонид Гамарц