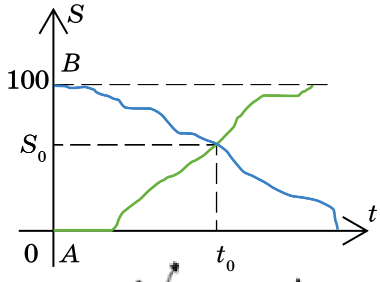
Александр Блинков

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ

(... НЕ ОТРЫВАЯ РУКИ ...)

Представим себе, что по поверхности стола ползает (но не взлетает!) муха. Тогда, как бы она ни меняла направление своего движения, мы сможем нарисовать траекторию этого движения «не отрывая руки». На этом простом соображении основано решение нескольких интересных задач. Но сначала вспомним, как устроены графики движений.



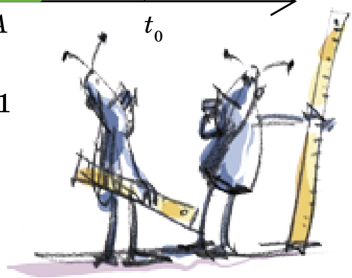
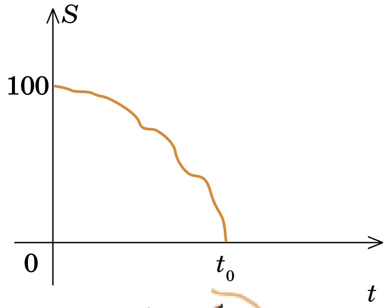


Рис. 1

Пример. Два автомобиля выехали из пунктов A и B, расстояние между которыми 100 км, навстречу друг другу по одному и тому же шоссе. Докажите, что расстояние между автомобилями принимает любое значение от 0 до 100 км (*в какие-то моменты времени*).

Решение. Отметим сначала очевидный факт: автомобили обязательно встретятся, независимо от того, как менялись их скорости, а также от того, в какое время каждый из них выехал. Тем не менее, полезно на это посмотреть с точки зрения графиков движения автомобилей.



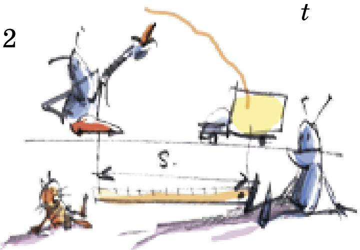
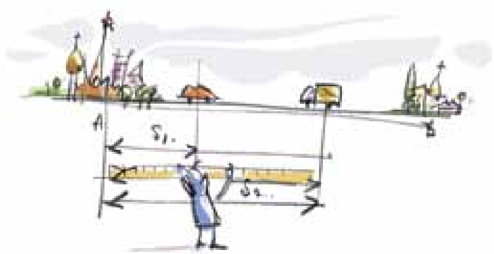


Рис. 2

Рассмотрим систему координат на плоскости: ось абсцисс t – время движения, ось ординат S – расстояние автомобиля от пункта A. Начнём отсчёт в тот момент, когда машина, выехавшая первой, начала движение. Тогда графики движения машин являются линиями (ломаными или кривыми), которые можно провести «не отрывая руки» (см., например, рис. 1). Заметим, что каждый график соединяет какую-то точку оси t с точкой, лежащей на прямой $S = 100$. Оба графика «начинаются» на одной вертикали и продолжаются вправо. При этом та **непрерывная линия**, которая началась выше, идёт «сверху вниз», а та линия, которая началась ниже, идёт «снизу вверх». Значит, эти линии обязательно пересекутся. Абсцисса t_0 точки пересечения графиков показывает время встречи автомобилей, а ордината S_0 – расстояние от пункта A до места встречи (*если в тот момент, когда одна машина ещё не выехала, другая уже проехала весь путь, то «встреча» произошла либо на оси t, либо на прямой $S = 100$*).



Для решения задачи также удобно посмотреть на график в похожей системе координат. Но теперь имеет смысл проследить зависимость расстояния между автомобилями от времени, начиная от момента выезда одного из автомобилей (того, который выехал первым), и до момента встречи.

Понятно, что расстояние между машинами также меняется **непрерывно**, значит, такой график также является **непрерывной линией** (см. рис. 2). Легко заметить, что на этом графике существуют точки с любой ординатой от 0 до 100, поэтому расстояние S между машинами в какие-то моменты времени принимает все значения от 0 до 100, что и требовалось.

Тот же результат можно было получить, рассмотрев аналогичную зависимость в другой промежуток времени – от момента встречи автомобилей до момента, когда в пунктах назначения уже окажутся оба автомобиля.

Теперь рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Два скалолаза шли двумя разными маршрутами, стартовав одновременно, и достигли точки финиша на вершине скалы также одновременно. Расстояние между точками их старта – 50 метров. Докажите, что в какой-то момент расстояние между скалолазами было 30 метров.

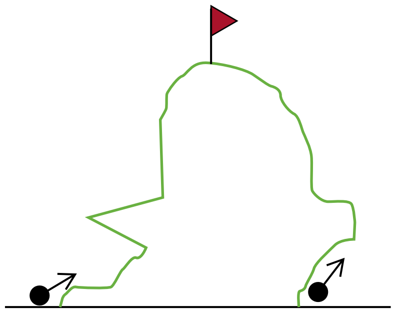
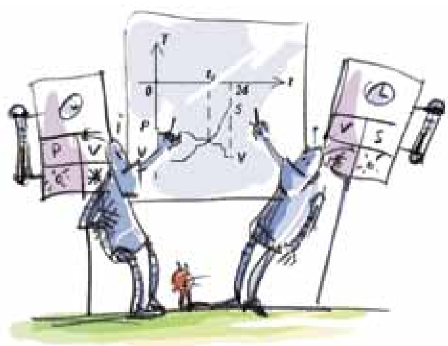


Рис. 3

Решение. Прежде всего отметим, что скала может иметь любую, даже весьма причудливую, форму (например, как на рис. 3), поэтому было бы ошибкой считать, что расстояние между скалолазами всё время уменьшается.

Тем не менее, это расстояние S с течением времени t изменяется **непрерывно** (*график зависимости S от t можно провести «не отрывая руки»*). Так как при $t = 0$ $S = 50$, а в момент времени, когда оба скалолаза оказались на вершине, $S = 0$, то, по аналогии с разобранным примером, можно утверждать, что величина S принимает все значения от 0 до 50, в том числе и значение 30.

Соображения непрерывности можно применять не только в задачах, связанных с движением.



Задача 2. Вчера в полночь было холоднее, чем будет сегодня и чем было позавчера. Докажите, что найдётся один и тот же момент времени в сутках вчера и сегодня, когда температура была одинаковой.

Решение. На отрезке [0, 24] построим график изменения температуры за вчерашние сутки (синяя линия). Теперь на этом же отрезке построим график температуры за сегодняшние сутки (зелёная линия), учитывая условие задачи (см. рис. 4, t – время в часах). В одном случае моментам времени 0 и 24 соответствуют точки P (полночь позавчера) и V (полночь вчера), а в другом – опять же V (на той же горизонтали) и S (полночь сегодня).

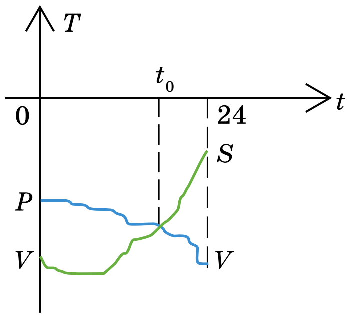


Рис. 4

Так как температура изменяется **непрерывно**, то эти графики пересекутся. Абсцисса t_0 точки пересечения – искомый момент времени.

Задача 3 (*о буддийском монахе*). Монах поднимался на священную гору. Он начал восхождение в 6 часов утра и достиг вершины в 6 часов вечера. На вершине он заночевал, а на следующий день в 6 утра начал спускаться по пути подъёма и достиг подножия горы в 6 часов вечера. Докажите, что существует такая точка на его маршруте, в которой монах сможет помолиться на пути туда и обратно в одно и то же время.

Решение. Представим себе, что монахов было двое, и в тот момент, когда первый начал подниматься на гору, второй начал спускаться с горы по тому же маршруту. Тогда в некоторый момент времени (между 6:00 и 18:00) они окажутся в одной точке, поскольку шли навстречу друг другу. Этот момент времени и эта точка маршрута будут искомыми.

При решении этой задачи мы сами организовали процесс движения монахов навстречу друг другу и использовали **непрерывность графиков** их движения.

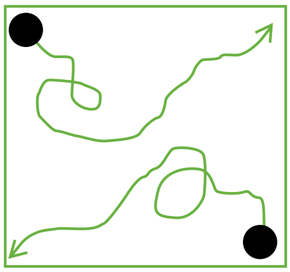
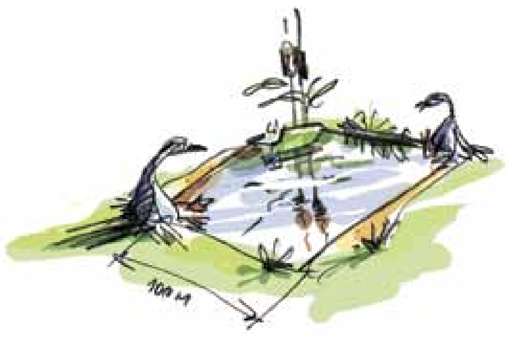


Рис.5

Задача 4. В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 метров сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между кончиками их клювов было равно 110 метров.

Решение. Изначально гуси находились на концах одной из диагоналей квадрата (см. рис. 5). Те из вас, кто уже знает теорему Пифагора, могут вычислить, что это расстояние в точности равно $100\sqrt{2}$ метров (*это примерно 141 м*), но и остальным, я думаю, понятно, что оно существенно больше, чем 110 м.



В силу симметрии квадрата можно считать, что первый гусь переплыл из левого верхнего угла в правый верхний, а второй гусь – из правого нижнего угла в левый нижний. Для этого в некоторый момент времени гуси обязаны были оказаться на одной вертикали, то есть в этот момент расстояние между ними было не больше, чем 100 м. Поскольку расстояние между гусями изменялось **непрерывно**, и $100 < 110 < 100\sqrt{2}$, то в некоторый момент времени расстояние между их клювами было равно 110 м.

В заключение выразим надежду, что **соображения непрерывности** помогут вам и при решении других задач. С различными **свойствами непрерывных функций** вы более подробно познакомитесь в старших классах.

Художник Сергей Чуб