Александр Шаповалов

Как построить пример?

Шаповалов А. В. Как построить пример? М.: Издательство МЦНМО, 2013 г.

Эта тонкая книжка учит школьников 5–7 классов решать задачи на построение примеров. Тут мы публикуем только первое занятие, а всего таких занятий пять. Каждое учит какому-нибудь приёму: 1. Как такое может быть? 2. Ищи там, где легче; высматривай знакомое. 3. Можно или нельзя? 4. Повторяемость. 5. Симметрии, сдвиги и повороты.

Обучение проходит через решение и разбор задач. Решения задач и пути к решению тщательно разделены, чтобы подчеркнуть, что в задачах на конструкцию готовое решение (то, что в идеале нужно написать) и путь к решению (пояснение, как такое придумать) обычно имеют мало общего.

Соглашение о формулировках. Если в условии требуется *построить, разрезать, расставить,* то поиск *всех возможных вариантов не требуется* (а если он нужен, это специально оговаривается).

Как такое может быть?

Хороший вопрос – это половина ответа.

Если на вопрос «Может ли?» вы подозреваете ответ «Может», то стоит спросить себя: «Как такое может быть?». Уточните вопрос: «Какими свойствами эта конструкция должна обладать?». И хоть в задании о свойствах не спрашивается, но дополнительное знание может сильно сузить круг поисков или осветить дорогу. Какие именно свойства искать – зависит от задачи. Тут помогает как математический кругозор, так и здравый смысл. В задачах на разрезание считают число сторон, площади, длины, углы. В задачах на делимость раскладывают на простые множители и считают остатки.

Шерлок Холмс говорил «Я задаю себе вопросы и последовательно отбрасываю невозможные случаи. То, что останется, и будет правильным, каким бы невероятным это изначально ни казалось».

Задавайте себе вопросы на протяжении всего построения. Вы с удивлением увидите, как много конструкций окажутся логичными и единственно возможными.

1.1. Можно ли квадрат 4×4 без угловой клетки (см. рис. 1) разрезать на 3 равные части?

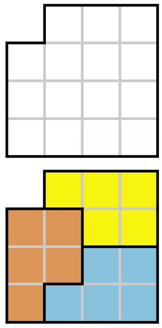


Рис. 1

Решение. Да, см. рис. 1.

Путь к решению. Надо задаться вопросом о площади части. Вычислив, что площадь *целая* – равна 5 площадям клеток, естественно попробовать разрезать *по границам клеток* на 3 пятиклеточные фигуры.

1.2. Расшифруйте ребус (одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные – разные):

$$Б + БЕЕЕ = МУУУ.$$

Решение. $1 + 1999 = 2000$.

Путь к решению. Добавив однозначное число, мы увеличили разряд тысяч. Значит, оба четырёхзначных числа отличаются от «круглого» (кратного тысячи) числа не больше чем на 9. У таких чисел три одинаковые последние цифры могут быть только 999 или 000, и разница между такими числами равна 1.

1.3. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Осталось 5 корок. Как такое может быть, если корок никто не грыз?

Решение. Проделав сквозную дырку, вырежем из арбуза продолговатый кусок мякоти с нашлёпками корки с двух сторон. Остальное разрежем на три части плоскими разрезами через ось дырки.

Путь к решению. На вопрос «Как такое могло быть?» найдём ответ по принципу Дирихле: должна быть часть с двумя (или более) корками. Эти корки, понятно, соединены куском мякоти.

1.4. Найдутся ли три натуральных числа, которые друг на друга не делятся, но каждое делит произведение двух других?

Решение. Например, 6, 10 и 15.

Путь к решению.

– Понятно, почему числа не делятся на самое большое из них. А почему не делятся на самое маленькое?

– Наверное, в маленьком есть простой множитель, которого нет в больших?

– Но произведение ведь делится, значит где-то этот множитель есть...

– Есть в одном, а в другом его нет.

– Ладно, а почему тогда другое на маленькое число не делится?

– Значит, в нём нет другого простого множителя.

– Идея: пусть каждое число раскладывается на два простых множителя, а с любым другим у него только один общий простой множитель. Группируя попарно множители 2, 3, 5, получим пример.

1.5. Мюнхгаузен говорит: «Позавчера мне было 40 лет, а в следующем году мне исполнится 43». Могут ли его слова быть правдой?

Решение. Могут, если барон родился 31 декабря, а фразу произнёс 1 января.

Путь к решению. Как такое может быть? Если в следующем году барону исполнится 43, то в текущем – 42, а в прошлом – 41.

– Но ведь позавчера было ещё только 40?

– Значит, 41 исполнилось вчера.

– Но ведь исполнилось в прошлом году?

– Значит, вчера был прошлый год.

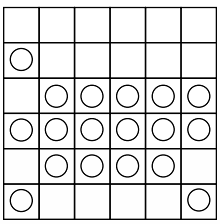
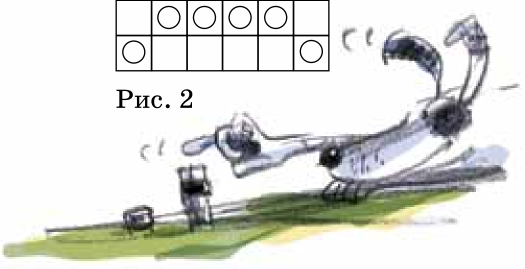


Рис. 2



1.6. Расставьте шашки на клетчатой доске 6×6 так, чтобы на всех горизонталях стояло разное число шашек, а на всех вертикалях – одинаковое.

Решение. Например, см. рис. 2.

Путь к решению. Число шашек на горизонтали может быть любым – от 0 до 6. Это даёт 7 вариантов.

Если бы было 7 разных горизонталей, сумма была бы $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Но один ряд надо убрать, и сумма при этом должна разделиться на 6. Единственная возможность – убрать 3. Далее надо так распределить шашки на горизонталях, чтобы в каждой вертикали оказалось по 3 шашки. Проще всего сгруппировать 5 с 1, а 4 с 2 так, чтобы каждая пара дала по одной шашке на каждую вертикаль (см. рис. 2).

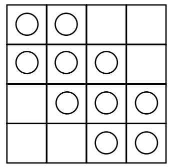


Рис. 3

Задачи для самостоятельного решения

1.7. В квадрате 4×4 отметили 10 клеток (см. рис. 3). Разрежьте квадрат на 4 одинаковые по форме части так, чтобы они содержали соответственно 1, 2, 3 и 4 отмеченные клетки.

1.8. Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли так быть?

1.9. Дата 21.02.2012 читается одинаково слева направо и справа налево. А будут ли после неё ещё такие даты в нашем столетии?

1.10. Придумайте способ разрезать квадрат на семиугольник и восьмиугольник так, чтобы для каждой стороны восьмиугольника нашлась равная ей сторона семиугольника.

1.11. В однокруговом турнире* за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. «Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

1.12. Барон Мюнхгаузен каждый день ходил на охоту, а возвратившись, говорил: «Сегодня я добыл уток больше, чем позавчера, но меньше, чем неделю назад».

а) Могли ли его слова 7 дней подряд быть правдой?

б) Какое наибольшее число дней подряд эти слова могли быть правдой?

* Каждая команда сыграла с каждой по одному разу

Художник Сергей Чуб