



Сергей Дориченко

Максим Прасолов

Это занятие нашего кружка посвящено играм. Только не компьютерным стрелялкам, не шахматам и даже не футболу или теннису, а играм математическим.

Все игры будут для двоих игроков. Мы выбрали для них имена: Пятачок и Винни-Пух. Так будет легко запомнить, кто ходит первым. Начинает всегда Пятачок – имя у него на букву «П», вот он и первый, а вторым всегда будет Винни-Пух – у него имя на букву «В». Иногда мы их будем называть – первый и второй (если больше нравится, можете называть их Петя и Вася). **Ходят игроки по очереди, а проигравшим считается тот, кто в свою очередь не может сделать ход по правилам.** Для краткости мы не будем повторять это в каждой игре.

Задача-шутка

1. Пятачок и Винни-Пух по очереди ломают шоколадку 6×8 долек. За ход игрок выбирает любой из имеющихся кусков и ломает его по прямой на 2 куска, но так, чтобы не повредить ни одной дольки (ломать надо вдоль углубления). Кто победит?

Играть можно и с настоящей шоколадкой, но лучше нарисовать её на бумаге и проводить «разломы» карандашом. Можно играть вдвоём, или одному, делая ходы и за Пятачка, и за Винни-Пуха. Попробуйте! Сыграв несколько раз, вы обнаружите, что всегда выигрывает... А впрочем, мы это сейчас поймём и без игры.

Что происходит после очередного хода, когда игрок берёт один из кусков и разламывает на две части? Общее число кусков шоколадки увеличивается на 1. Сначала был один кусок, после хода Пятачка кусков станет 2, после хода Винни – 3, после хода Пятачка – 4, после хода Винни – 5, и так далее. Когда же закончится игра? Когда шоколадку разломают на отдельные дольки, их будет 48. Но кто сделает последний разлом? Заметьте – после ходов Пятачка всегда остаётся чётное число кусков (2, 4, 6, ...), а после хода Винни-Пуха – нечётное (3, 5, 7, ...). Значит, 48 кусков получится после хода Пятачка – он и выиграет!





Какая-то неинтересная игра оказалась. В ней первый игрок может играть как попало и всё равно выигрывает. Куда лучше игры, в которых надо соображать, придумывать стратегии. Что же, переходим к ним. Кроме развлечения, нас будет интересовать вопрос: кто из игроков – начинающий или его партнёр – может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? Иногда этот вопрос кратко формулируют так: *кто выигрывает при правильной игре?* Или так: *у кого из игроков есть выигрышная стратегия?* Такую стратегию – как выбирать ходы, чтобы всегда выигрывать, – иногда можно явно указать. Прежде чем читать решение, обязательно попробуйте найти стратегию самостоятельно. Вот, например, в такой игре.

Симметрия

2. Пятачок и Винни-Пух по очереди кладут пятак на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга и не вылезали за пределы стола.

Пусть Пятачок первым ходом положит пятак в центр стола. А дальше на каждый ход Винни-Пуха будет класть свой пятак симметрично его пятаку относительно центра стола (как показано на рисунке). Картинка, как лежат пятак на столе, после ходов Пятачка будет симметричной. Поэтому если Винни-Пух сможет на ней отыскать место для своего пятка, то и Пятачок для своего отыщет симметричное свободное место. Значит, Пятачок выигрывает.

Вот ещё пример игры с «симметричной стратегией».

3. У Пятачка и Винни-Пуха есть 2 кучки камней, по 20 штук в каждой. Игрок берёт любое число камней из любой одной кучки (но не из двух кучек сразу).

Наверное, вы уже догадались, что тут выигрывает второй. На каждый ход первого он отвечает «таким же» ходом: берёт столько же камней, но из другой кучки.

4. А если в предыдущей задаче изначально в одной кучке 20 камней, а в другой – 30?



Игра немного хитрее. Выигрывает первый – сначала он берёт из большей кучки 10 камней и сводит задачу к предыдущей. Теперь в кучках камней поровну, но ходит второй игрок. И уже первый игрок может дублировать его ходы.

5. А если изначально даны три кучки по 20 камней?

Вы, конечно, уже догадались: первый должен сначала забрать одну кучку полностью.

6. А если – четыре кучки по 20 камней?

Тут чуть хитрее. На ход первого второй выбирает другую кучку и берёт из неё столько же. И на этих двух кучках продолжает копировать ходы соперника. Если же первый затронет одну из двух оставшихся кучек, то второй и на тех двух кучках ходит симметрично.

Теперь вы наверняка решите задачу, если в ней будет хоть 100 одинаковых кучек.

Но не во всех играх симметричная стратегия приводит к успеху. Иногда бывает не так просто понять, какой же сделать ответный ход после хода противника.

Ответный ход

7. На первой клетке полосы размером 1×25 клеток лежит фишка. Пятачок и Винни-Пух по очереди сдвигают фишку на 1 или 2 клетки вперёд.

Поиграйте с другом в эту игру. Тут не сразу становится понятно, кто же обладает выигрышной стратегией. Оказывается, Винни-Пух обеспечит себе победу, если будет каждым ходом сдвигать фишку на другое число клеток, чем только что сдвинул Пятачок. Тогда за каждые два хода фишка сдвинется ровно на 3 клетки. И так как $1 + 3 \cdot 8 = 25$, за 8 таких двухходовок Винни-Пух поставит фишку на 25-ю клетку.

А если бы всего было 26 клеток? Тогда хитрый Пятачок первым ходом сдвинул бы фишку на одну клетку вперёд, а дальше получилась бы та же самая игра, что и раньше, с 25 клетками, но первым ходит уже Винни! Значит, обеспечить себе победу может Пятачок.

А если клеток 27, или 50, или 100? Наверно, вы уже легко ответите, кто в каждом из этих случаев



может обеспечить себе победу. Тогда для вас дополнительный вопрос: решите эту же задачу, если тот, кто поставит фишку на последнюю клетку, проигрывает!

8. А если в предыдущей задаче можно сдвигать фишку и на 3 клетки вперёд тоже?

Давайте проанализируем предыдущую игру. В ней один из игроков выигрывал, отвечая на предыдущий ход соперника так, чтобы фишка в итоге сдвигалась на одно и то же число клеток. Можно ли сделать что-то подобное в этой игре? Конечно. Если на ход в 1 клетку отвечать ходом в 3 клетки, а на ход в 2 клетки отвечать ходом в 2 клетки, то за два хода фишка будет сдвигаться ровно на 4 клетки. Тогда в нашей игре второй победит! Ведь $25 = 1 + 4 \cdot 6$, то есть за 6 двухходов фишка как раз попадёт на последнюю клетку.

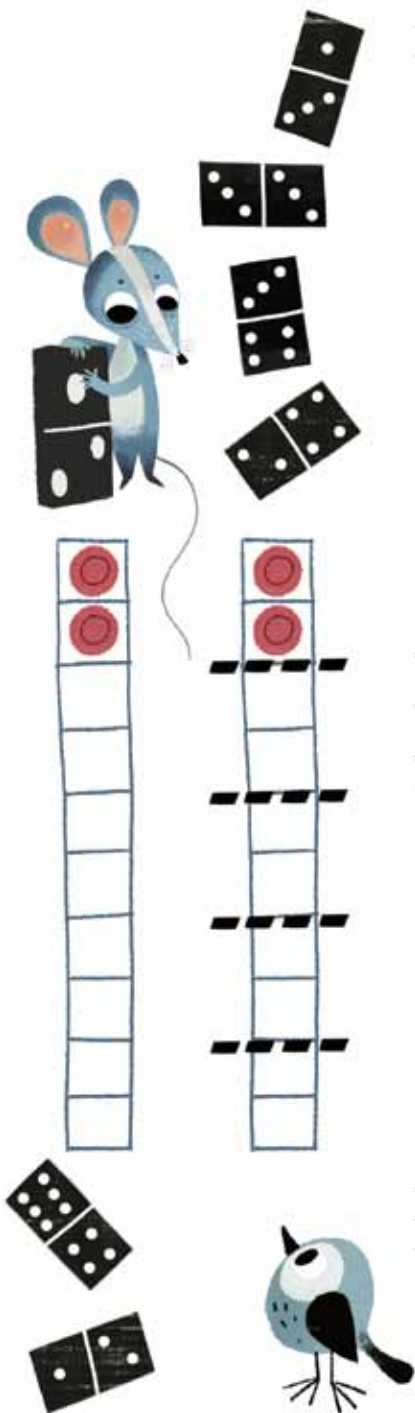
А если бы в полоске было, например, 26, 27 или 28 клеток? Тут победил бы первый, сводя начальным ходом эту игру к предыдущей. А при 29 клетках выигрывает снова второй.

9. Дан столбик из 10 клеток. В двух самых верхних клетках стоит по фишке. Игрок своим ходом переставляет любую из фишек вниз на любую незанятую клетку (можно перепрыгивать через другую фишку).

В этой игре ответные ходы одновременно очень простые и очень хитрые. Давайте мысленно разделим столбик, как показано на рисунке, на доминошки из двух клеток. Сначала обе фишки стоят в одной доминошке. Второй выигрывает, если будет сохранять это свойство: когда первый сделает ход и поневоле переместит одну фишку в другую доминошку, второй должен и другую фишку поставить в ту же доминошку. Тогда у него всегда будет ход, и раньше ходы закончатся у первого.

10. А если в предыдущей задаче дана полоска длиной 11 клеток?

Наверное, вы догадались, что тут выигрывает уже второй. Тогда вам дополнительный вопрос: а кто выигрывает, если фишек три и стоят они изначально в трёх верхних клетках?



Но как же находить ответные ходы в разных играх? И всегда ли это возможно? Мы ещё вернёмся к этому на страницах нашего журнала. И расскажем о других интересных способах найти стратегию. Ведь математических игр очень много. А пока – ещё несколько игр. Попробуйте разобраться в них без подсказки. На всякий случай решения приведены в конце номера. Удачи!

Задачи для самостоятельного решения

Напомним, что проигравшим считается тот, кто не может сделать ход в свою очередь. А узнать надо, кто выигрывает при правильной игре. Для краткости мы не повторяем эти слова. Помните, что иногда полезно бывает рассмотреть частные случаи или упростить задачу (например, решить задачу 14 сначала для полосок 1×4 , 1×5 , ...).

11. а) Дана белая клетчатая полоска 1×15 клеток. Двое по очереди окрашивают одну или две соседние белые клетки.

б) А если в полоске 20 клеток?

12. В левом нижнем углу шахматной доски 8×8 стоит фишка. За ход можно передвинуть её на любое число полей либо вверх, либо вправо.

13. У ромашки **а)** 12; **б)** 11 лепестков. В свой ход игрок обрывает 1 или 2 рядом растущих лепестка.

14. На крайней правой клетке полоски 1×20 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают её вправо или влево на любое число клеток, которое ещё не встречалось при предыдущих ходах.

15. Белая ладья преследует чёрного слона на доске размером 3×10 клеток (см. рисунок). Ходят по очереди по обычным правилам, начинают белые. Как играть ладье, чтобы взять слона?

16. На клетчатой доске 7×7 в центре стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку на одну из соседних (по стороне) клеток, если эта клетка ранее ни разу не была занята фишкой.

