



Если ПАМЯТЬ подвела

Лицо шестиклассника Пети выражало одновременно уныние и надежду.

– Коля! – обратился он к старшему брату. – У меня беда. Пропустил я по болезни контрольную. Учительница говорит – придётся всё-таки писать. Но в последний момент пожалела и дала задачу на дом. То есть завтра я должен отдать ей решение в письменном виде. Помоги, а?

– А что, в твоём классе помочь некому?

– Понимаешь, задача-то не из учебника, а из какой-то специальной книги¹. У нас все как глянули, так руками замахали.

– Ладно, давай условие, – недовольно буркнул Коля.

– Я не записал, а так запомнил, и потому расскажу своими словами. В общем, Ломоносов, когда учился, тратил одну денежку в день на хлеб и квас. Потом все цены возросли м-м-м... *на сколько-то там процентов...*

– На сколько?

– Не помню, – удручённо вздохнул Петя. – Но после этого Ломоносову стало хватать одной денежки только на полхлеба и квас. А потом цены опять выросли...

– И как же они выросли? Тоже не помнишь?

– Э-э-э... ура, вспомнил – на столько же процентов, как и в первый раз!

– Ну, спасибо, обрадовал! Ценная информация.

– Не издевайся, пожалуйста! Я ж не виноват, что забыл. В общем, в конце там спрашивается: хватит ли теперь Ломоносову одной денежки хотя бы на квас?

– Ну ты даёшь! Как же я решу, если ты самое главное не сказал?

– Что делать – память подвела. Пожалуйста, помоги! Ты ведь десятиклассник! – заныл Петя.

– Ладно, не стони. Попробуюсь, – и Коля начал рассуждать вслух. – Начнём как обычно. Пусть до всех подорожаний цены хлеба и кваса в денежках были X и K соответственно, а потом они оба раза возрастали в M раз. Тогда получаем два уравнения:

$$X + K = 1, \quad (1)$$

$$M(0,5X + K) = 1. \quad (2)$$

¹ Книга называется «Тысяча и одна задача по математике»; издана в 2010 году издательством «Просвещение»; автор-составитель – А. В. Спивак. Номер задачи – 352. Она же была предложена на одной из Московских математических олимпиад.

Избавимся хотя бы от одного неизвестного. Из уравнения (1) следует, что $X = 1 - K$. Подставив это значение в уравнение (2), получаем:

$$M(0,5(1 - K) + K) = 1,$$

или, после упрощений:

$$M = \frac{2}{1 + K}. \quad (3)$$

Что дальше? Цены поднимались дважды в M раз. Поэтому после двух подорожаний стоимость кваса, очевидно, составила $M^2 K$. Осталось выяснить, будет ли эта величина меньше или равна 1 (и тогда одной денежки на квас Ломоносову хватит) или больше 1 (тогда не хватит). Подставим значение M из уравнения (3) и получим:

$$M^2 K = \left(\frac{2}{1 + K}\right)^2 \cdot K = \frac{4K}{(1 + K)^2}.$$

Ну а теперь что? Это выражение больше единицы или меньше? Наверно, для разных K будет по-разному. Проверим навскидку некоторые значения. Так как K – первоначальная цена кваса, то она лежит между 0 и 1. Где там калькулятор... Попробуем для начала $K = 0,5$. Получаем 0,888... – меньше единицы. А если $K = 0,2$? Тогда выходит 0,55... – тоже меньше. В другую сторону: $K = 0,8$ – результат равен 0,987... Опять меньше единицы! Может, для всех K так будет? Скорее всего, да, но как это доказать? О! Придумал! Мы хотим убедиться, что

$$\frac{4K}{(1 + K)^2} < 1,$$

то есть что $4K < (1 + K)^2$. Раскрываем скобки и переносим всё в правую часть:

$$0 < 1 - 2K + K^2.$$

Но теперь выражение в правой части – это же $(1 - K)^2$, то есть квадрат числа. Причём ненулевого, так как у нас K не равно 1. А квадрат ненулевого числа всегда больше нуля, так что наше неравенство доказано.

– Выходит, квас и после подорожаний будет меньше денежки стоить, да?

– Да, независимо от процента инфляции Ломоносову заведомо хватит одной денежки на квас, – подытожил Коля. – А теперь слушай меня. Аккуратно всё это перепиши и потом скажи учительнице, что ты потерял условие, вспомнить всего не смог и потому





решал задачу в общем виде. Глядишь, за это она тебе лишний плюс поставит!

– Ты меня просто спас, Коля! Вот сейчас перепишу всё начисто – и пятёрка у меня в кармане.

После возвращения из школы на следующий день физиономия Пети мало чем отличалась от прежней.

– Опять что-то не так? – встревожился брат.

– Да как тебе сказать... Вроде и так, да не вполне...

– Не тяни kota за хвост! Что там случилось?

– Понимаешь, я перед самым уроком всё-таки вспомнил, что цены каждый раз поднимались ровно на 20 процентов, то есть в 1,2 раза. И по-быстрому подправил решение. Хотел ведь как лучше! А она прочла то, что получилось, и сказала, что решение формально верное, но производит *очень странное впечатление*.

– Ну-ка, показывай, – Коля взял листок бумаги и принялся читать. – Да ты ведь просто моё решение один в один переписал, ни слова не изменив, только везде вместо M поставил 1,2.

– Ну да, а разве это не правильно?

– Да правильно-то правильно. Но раз ты уже M знаешь, гораздо короче можно было решить. Уравнение (3) у тебя в такое превращается:

$$1,2 = \frac{2}{1+k},$$

и ты из него сразу k находишь, получается $k = 2/3$. А значит, квас после второго подорожания стоил $1,2^2 \cdot 2/3 = 0,96$ – меньше единицы. А ты вместо этого ещё на страницу огород городил – вроде и знаешь, во сколько раз цены возрастали, но как будто этого не видишь. Так что *странное впечатление* – это мягко сказано. За такое решение и к психиатру угодить не грех. В общем, зачла она тебе контрольную или нет?

– Нет, – развёл руками Петя. – Дала мне другую задачу, сказала, что из детской книжки. Там её четвероклассники решали². «Вот, говорит, завтра дашь мне ответ. Но *только ответ*, никаких решений, а то я тут с тобой с ума сойду!» Помоги, а?

– Ладно, давай условие, – обречённо произнес Коля.

– Я не записал, так запомнил. Смотри: 12 топоров и 3 пилы стоят... э-э-э...

² Книжка называется «Витя Малеев в школе и дома», автор – Н. Носов. Отрывок с подробным решением задачи публиковался в «Квантике», №№ 8 и 9 за 2012 год.

– Опять память подвела?!!!

– Ой, подвела! Но зато дальше помню точно: а 12 топоров и 5 пил стоят 100 рублей! Круглые числа легко запоминаются. Спрашивается, сколько стоит топор и сколько стоит пила?

– С тобой, пожалуй, и я свихнусь. Попробуй реши, если половины данных нет! Хотя... Как ты сказал, для какого класса эта задача?

– Для четвёртого...

– Ну, тогда... всё ясно: топор стоит 5 рублей, а пила... м-м-м... двенадцать на пять, из сотни шестьдесят, сорок делим на пять... пила, получается, стоит 8 рублей. Без гарантии, конечно, но ты сам виноват. Так и скажешь своей учительнице: пять и восемь!

– А как ты определил?

– Да потому что задача для *четвёртого* класса! Там ведь «навороченных» задач не дают. И потому более чем вероятно, что цена и топора, и пилы составляет *целое* число рублей.

– А что это дает?

– Смотри. Так как пил пять штук, то их суммарная цена делится на 5, верно?

– Да...

– А общая стоимость всех топоров и пил равна 100 – то есть тоже делится на 5.

– Конечно.

– Потому и стоимость *только топоров* должна делиться на 5. Но топоров-то 12 штук, и потому цена каждого топора обязана делиться на 5. А что это значит? Наименьшее возможное её значение – 5 рублей. Тогда все 12 топоров стоят $5 \cdot 12 = 60$ рублей, и потому пилы все вместе стоят $100 - 60 = 40$, а одна пила стоит $40 : 5 = 8$ рублей. Вот и ответ!

– Но, может, есть и другие...

– Нет! Ведь следующее возможное значение – 10 рублей, и тогда 12 топоров стоят больше 100 рублей. Так что остановимся на этом решении.

– Но ты говорил, что без гарантии...

– Не беспокойся – с гарантией! Я-то, в отличие от тебя, эту книгу читал. И задачу помню хорошо. А память свою тренируй, а то что-то она у тебя совсем дырявая стала!

