НАШ КОНКУРС («Квантик» №9)

41. *Какая цифра встречается реже всего при записи первых ста натуральных чисел? А какая – чаще всего?*

Решение. Ясно, что каждая цифра от 2 до 9 встречается в разряде десятков в десяти числах и в разряде единиц тоже в десяти числах, то есть встречается 20 раз (а цифра 1 ещё есть в числе 100, то есть встречается 21 раз). Цифра 0 встречается в разряде единиц в десяти числах и в разряде десятков только в числе 100, то есть встречается 11 раз. Значит, самая частая цифра – 1, а самая редкая – 0.

42. *У хозяйки было два клетчатых коврика: 6×6 клеток и 8×8 клеток. Она решила сделать из них один коврик 10×10 клеток. Может ли она добиться этого, разрезав каждый коврик не более чем на две части и не повредив ни одной клеточки?*

Решение. Может. Например, так, как показано на рисунке 1.

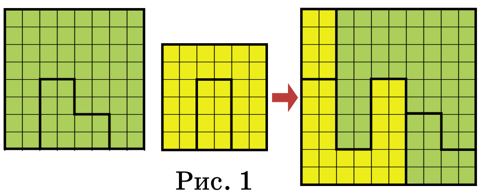


Рис. 1

43. *Три спортсмена стартовали одновременно из одной точки круговой дорожки. Через некоторое время они вновь одновременно оказались в точке старта. Известно, что за это время самый быстрый спортсмен обогнял самого медленного 23 раза (обгон в момент старта не учитываем). Сколько всего за это время было случаев, когда один из спортсменов обгонял другого? Спортсмены бегут равномерно, с различными скоростями.*

Решение. Напомним, что по условию задачи обгон в момент старта не считается обгоном. Встреча на финише тоже не считается за обгон. Заметим тогда, что если один спортсмен обогнал другого k раз и ещё догнал на финише, то пробежал он ровно на $k+1$ кругов больше. Значит, число обгонов одного спортсмена другим на 1 меньше разности числа сделанных ими кругов. Пусть самый медленный пробежал x кругов, средний – y, а самый быстрый – z. Тогда средний обогнал медленного $(y-x)-1$ раз, быстрый обогнал среднего $(z-y)-1$ раз и быстрый обогнал медленного $(z-x)-1$ раз. Мы знаем, что последнее число равно 23, откуда $z-x=24$. А общее число обгонов равно сумме $(y-x)-1+$ $+(z-y)-1+(z-x)-1=2(z-x)-3=48-3=45$.

44. *Дан прямоугольник ABCD. Проведена прямая, которая отсекает от стороны AB одну треть, а от стороны AD – одну четверть, считая от вершины A. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали AC?*

Решение. Разделим прямоугольник на одинаковые прямоугольные клеточки, как показано на рисунке 2. Проведём в них диагонали, параллельные XY. Ясно, что получится 6 параллельных прямых (рис. 3). Между любыми соседними прямыми можно найти треугольную половинку клеточки: вершина с прямым углом лежит на одной прямой, а гипотенуза – на другой прямой.

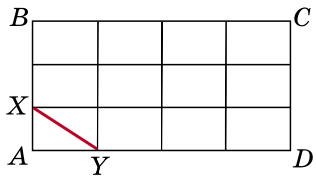


Рис. 2

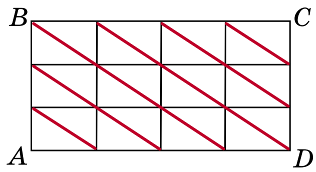


Рис. 3

Высота, проведённая из этой вершины к гипотенузе, равна расстоянию между прямыми. Значит, расстояния между соседними прямыми одинаковы и равны также расстояниям от A и C до ближайших прямых. Но тогда прямые разделят отрезок AC на равные части! Докажем строго это интуитивно очевидное утверждение.

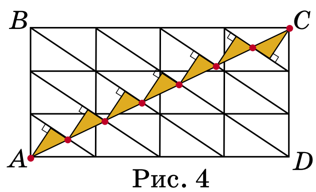


Рис. 4

Отметим точки пересечения наших прямых с отрезком AC и опустим из некоторых точек высоты на соседние прямые (рис. 4). Высоты получатся одинаковыми – они равны расстоянию между соседними прямыми. Поэтому окажутся равными и закрашенные прямоугольные треугольники (по катету и углу). Но тогда равны и их гипотенузы, а это как раз части, на которые разделился отрезок AC нашими шестью прямыми. Значит, длина каждой части равна $1/7$ от AC.

45. а) *На столе лежат две кучки по 20 спичек в каждой. Петя и Вася играют в такую игру. Первым ходом Петя перекладывает одну спичку из какой-то кучки в другую, затем Вася тоже перекладывает одну спичку из какой-то кучки в другую. Вторым ходом Петя, а потом Вася, перекладывают уже по* *две спички, третьим ходом – по три, и так далее. Побеждает тот, после хода которого либо все спички впервые окажутся в одной кучке, либо соперник не сможет сделать свой ход. Придумайте для одного из игроков стратегию – как ему играть, чтобы всегда выигрывать (при любой игре его соперника).*

б) Та же задача, но изначально в кучках по 25 спичек.

а) Ответ: побеждает Вася.

Решение. Первыми 9 ходами Вася должен возвращать спички, взятые Петей, в ту кучку, откуда Петя их взял. В результате после каждого из этих ходов Васи в кучках будет по 20 спичек. Десятым же ходом Петя переложит из одной кучки в другую 10 спичек, затем Вася переложит туда же оставшиеся 10, и все 40 спичек окажутся в одной кучке, и Вася выиграет.

б) Ответ: побеждает Петя.

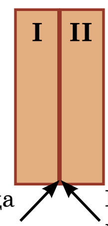
Решение. Поскольку игра может продолжаться не дольше 50 пар ходов, кто-то обязательно выиграет. Покажем, что Петя не проиграет (и значит, он выиграет). Заметим, что нечётные ходы Пети и Васи меняют чётность числа спичек в каждой кучке, а чётные – не меняют. Значит, после каждого хода Васи в обеих кучках будет нечётное число спичек, так что Вася не сможет победить, собрав все 50 спичек в одной кучке. Теперь заметим, что если Вася своим очередным ходом переложил из одной кучки в другую n спичек, в этой другой кучке стало не менее $n+1$ спички (ведь там была хотя бы одна спичка, иначе второй проиграл бы на предыдущем ходу). Поэтому Петя сможет своим очередным ходом переложить $n+1$ спичку, и, стало быть, проигрыш по причине отсутствия хода ему тоже не грозит.

ЧЕРВЬ НА КНИЖНОЙ ПОЛКЕ («Квантик» №10)

Ответ: 4 мм.

Решение. Первая страница первого тома и последняя страница второго находятся на полке рядом, их разделяют только обложки (рис. 5).

Рис. 5



СТОЙКИЕ ШИФРЫ

Подсказка. По некоторым словам можно догадаться про некоторые соответствия букв. Обратите внимание на слово «пип-кещвсг», на сочетание «ка ак», на часто встречающееся «ко».

Ответ. *Это отрывок из сказки Андерсена «Снежная королева».*

ЦЕПЬ

Достаточно разомкнуть каждое звено той части цепи, которая состоит из четырёх звеньев. Затем сцепить ими оставшиеся пять частей цепи и сомкнуть эти звенья. Если разомкнуть лишь три некоторых звена, то останется как минимум пять частей цепи, которые нельзя сцепить тремя звеньями.

ПОДВИГ ЮНОГО БЕРТОЛЬДА

Узники могли сговориться и действовать, например, так. Они выбирают Бертольда «счётчиком». Он будет считать узников, которые посетили Чёрную-чёрную комнату, следующим образом. В начале число подсчитанных узников равно нулю. Далее, если, приходя в Чёрную-чёрную комнату, «счётчик» обнаруживает, что свет включён, он прибавляет к уже посчитанному числу узников единицу и выключает свет, если же свет не горит, то он, ничего не меняя, возвращается обратно в свою камеру. Каждый из прочих, обычных узников, действует по такому правилу: если, приходяв Чёрную-чёрную комнату, он обнаруживает, что свет не горит, и он до этого ни разу не включал свет, то он его включает. В остальных случаях он ничего не меняет.

Когда число посчитанных узников становится равным 19, «счётчик» говорит, что все узники уже побывали в комнате. Эта стратегия приводит к желаемому результату. В самом деле, каждый узник, кроме Бертольда, включит свет в комнате не более одного раза, а Бертольд вообще не включает свет. Если «счётчик» насчитал 19, значит, каждый из оставшихся узников побывал в комнате хотя бы раз. И «счётчик» там, конечно, тоже уже был.

Почему Бертольд непременно насчитает до 19? Допустим, это не так, то есть свет будет включён менее 19 раз, – досчитав до некоторого числа $m < 19$, «счётчик» выключит свет, и больше лампа никогда не будет зажжена. Но поскольку прочих драконоборцев 19, обязательно найдётся узник, ещё не зажигавший лампу. По условию, он окажется в Чёрной-чёрной комнате после указанного момента и должен будет включить свет. Противоречие.

Попробуйте решить более сложную задачу – придумайте стратегию узников, если неизвестно, включена вначале лампа или выключена.

ПРЕВРАЩЕНИЯ ВЕЩЕСТВ НА СЛУЖБЕ У ИЗОБРЕТАТЕЛЯ

Оказалось, что сироп вместо нагревания наливают в формочки и замораживают. Теперь на замороженную начинку остаётся только нанести слой шоколада. Через некоторое время сироп оттает и конфета будет готова. Если у вас не получилось решить задачу от дяди Юры, обдумайте хорошенько это решение.

ЧЕЛОВЕК-МАГНИТ

Когда Толя Втулкин повернулся к ребятам спиной и наклонился, он приложил воронку к животу, незаметно для окружающих закусил трубку губами, сделал глубокий вдох и пережал конец трубки – и воронка «присосалась» к животу Толика. От падения воронку удерживало внешнее атмосферное давление.

НЕУДАЧИ ОДНОЙ ЦИВИЛИЗАЦИИ

Заметим, что на рис. 3 статьи точка A_1 получена из точки C_1 поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг A, а B_1 получена из C_1 поворотом по часовой стрелке вокруг B. Будем двигать точку C_1 и покажем, что при этом середина отрезка A_1B_1 остаётся неподвижной.

Сдвинем точку C_1 на x вправо и получим точку C'_1. Построим, как раньше, точки A'_1 и B'_1 (рис. 6).

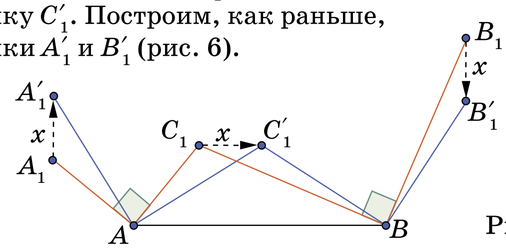


Рис. 6

При повороте на 90° вокруг A точка C_1 переходит в A_1, а точка C'_1 – в точку A'_1. Так как отрезок $C_1C'_1$ горизонтальный, а поворот – на 90°, он перейдёт в вертикальный отрезок $A_1A'_1$. Тем самым, точка A_1 сдвинется на x вверх (в точку A'_1). Аналогично, точка B_1 сдвинется на x вниз. Значит, середина отрезка A_1B_1 останется на месте (например, потому, что два треугольника на рисунке 7 равны по стороне и двум углам).

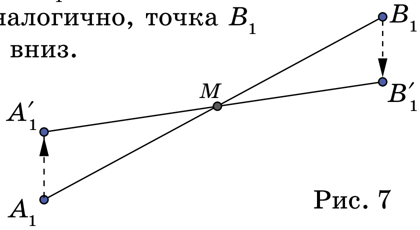


Рис. 7

Также, например, если подвинуть точку C_1 на y вверх, то точка A_1 сдвинется влево на y, а B_1 – вправо на y (рис. 8). И снова середина отрезка A_1B_1 неподвижна.

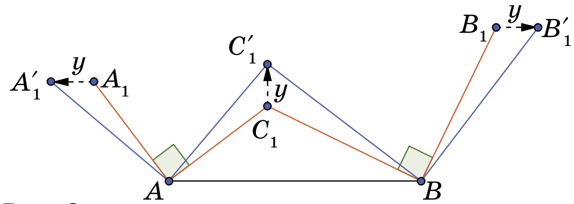


Рис. 8

Сдвигами влево, вправо, вверх и вниз можно передвинуть точку C_1 в любое положение, и середина A_1B_1 останется неподвижной.

АНГЛИЙСКОЕ РАЛЛИ

- – Ничего странного, – сонным голосом пробормотала Лиза, – просто у твоей машины на спидометре километры в час, а столбы показывают расстояние в милях. 1 английская миля = = 1609 метров, поэтому 100 км = 62,1 мили.
- В Англии левостороннее движение, а Вова вёл машину по правой стороне.
- Вова обогнал гонщика, идущего на третьем месте. Значит, он занял третье место.

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК

1. Болгарский язык – близкий родственник русского (оба они относятся к славянским языкам). Опираясь на это соображение, нетрудно догадаться, что название *стотинка* происходит от числительного *сто* и означает «сотая часть». Ответ: (Д).

2. Сначала заполним пропуски в словах *де…ять* и *…емь*. Очевидно, что *де…ять* – это *девять* или *десять*, а *…емь* – это *семь* или *восемь*. Вспомним таблицу умножения: 9 • 7 = 63 (вариант А), 10 • 7 = 70 (вариант В), 9 • 8 = 72 (вариант Г), 10 • 8 = 80 (вариант Д). В результате **не** может получится только вариант Б – 64. Ответ: (Б).

3. Приобретая переносное значение «очень много», такие слова, как *куча*, *гора*, *ворох* и т.д., тем не менее остаются существительными; в частности, они сохраняют способность иметь при себе некоторые определения. Вот и в данном случае в разговорной речи вполне можно было бы услышать ещё более эмоциональную реплику: «*Блинов напекла **чёртову** пропасть!*» Ответ: (А).