УСЛОВИЯ

1. (6–8) Дана дробь 2/3. Разрешается много раз в любом порядке выполнять следующие операции: прибавлять 2013 к числителю или прибавлять 2014 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную 3/5?

К. Кохась

2. а) (6) Разрежьте клетчатый прямоугольник размерами 9×10 клеток на несколько квадратов так, чтобы среди них было ровно два квадрата с нечётной стороной. Разрезы должны идти по сторонам клеток.

б) (7) Клетчатый прямоугольник размерами 19×20 клеток разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по сторонам клеток). Какое наименьшее число квадратов с нечётной стороной может оказаться среди них?

К. Сухов

3. (6–7) В ящике у Гарри Поттера 100 шариков – красных, белых и зелёных. Три из них – волшебные, они время от времени меняют цвет (на любой из этих трёх). Однажды Гарри Поттер заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше чем белых, а белых больше, чем зелёных. Заглянув через минуту, он увидел, что все стало наоборот: зелёных больше, чем белых, а белых больше, чем красных. Сколько белых шариков он увидел, когда заглядывал в ящик первый раз?

Д. Максимов

4. (6) Джентльмены всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то

50 джентльменов и каждый сказал каждому из остальных какую-то из фраз «*У меня чётное число знакомых в этой компании*» или «*У меня нечётное число знакомых в этой компании*». Может ли так быть, что первая фраза была произнесена ровно 2013 раз?

А. Солынин

5. (8) Сумасшедший конструктор создал часы с 150 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час, ... , 150-я стрелка делает 150 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вверх. Когда в процессе работы часов встречаются две или более стрелки, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 74 оборота в час?

К. Кохась

6. (8) На выборах в Солнечном Городе можно было проголосовать за Винтика, Шпунтика или Кнопочку. После оглашения результатов оказалось, что все кандидаты набрали в сумме 146% голосов. Считавший голоса Незнайка объяснил, что по ошибке подсчитал процент голосов за Винтика не от общего числа проголосовавших, а лишь от числа голосовавших за Винтика или Шпунтика (остальные проценты он подсчитал правильно). Известно, что за Шпунтика проголосовало больше 1000 избирателей. Докажите, что Винтик набрал больше 850 голосов.

А. Солынин

Художник Сергей Чуб

РЕШЕНИЯ

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=\cos \operatorname{arctg} 0{,}75$$

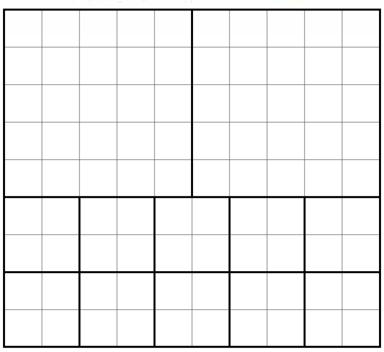

Рис. 1.

1. Ответ: нет. Сначала заметим, что при выполнении операций числитель и знаменатель растут, поэтому если мы хотим, чтобы полученная дробь была записана именно как 3/5, мы должны будем сократить дробь.

Если вы думаете, что в задаче всё дело только в этом, что сокращение – это операция, не упомянутая в условии задачи, и, пользуясь лишь разрешёнными операциями, требуемую дробь получить невозможно, то скорее закройте эту страницу и порешайте задачу ещё. Потому что не важно, как вы записываете дробь – в виде 3/5 или, скажем, в виде 3000/5000 – это одно и то же число, правда, записанное разными способами, его и не так ещё можно записать.

Вернёмся к решению задачи. Итак, если мы сумели получить дробь (с большим числителем и большим знаменателем), равную 3/5, то это значит, что на самом деле полученная нами дробь сократима. В частности, если числитель этой дроби поделить на некоторое число, получится числитель дроби 3/5, т.е. 3. Но это означает, что наш большой числитель делится на 3!

Осталось сделать последний шаг: дело в том, что число 2013 обладает *секретным* свойством: оно делится на 3. Секретным это свойство является из-за того, что нигде в задаче ни о чём таком не спрашивается, и идея ни с того, ни с сего воспользоваться этим свойством нормальному человеку в голову приходить не должна (да, в общем-то, и не приходит, как показали результаты олимпиады).

Предыдущий абзац содержит всего одну полезную мысль – она набрана очень мелким шрифтом. Всё остальное, как это принято называть, вода. Зачем же мы налили столько воды в этот абзац? Для того, чтобы, читая этот абзац, вы могли бы сообразить, как же всё-таки решается эта задача, если до сих пор этого не сделали. Исходный числитель 2 не делится на 3. Прибавляя к нему несколько раз число 2013, делящееся на 3, мы не сможем получить числитель, делящийся на 3. И значит, никакое сокращение не поможет нам получить дробь с числителем 3. В частности, дробь 3/5 получить невозможно.

2. а) См. рис. 1. б) Ответ: 4 нечётных квадрата.

Докажем оценку, т.е. что любое разбиение содержит не меньше четырёх нечётных квадратов. Сначала решим загадку: а почему вообще должны появиться нечётные квадраты? Ответ прост: когда прямоугольник разрезан на квадраты, каждая его сторона разрезана на отрезки, являющиеся сторонами квадратов. Если бы все эти отрезки имели чётную длину, то и все стороны прямоугольника имели бы чётную длину.

В первом пункте этой задачи для разрезания прямоугольника понадобилось 2 нечётных квадрата. С прямоугольником 19×20 такой фокус не пройдёт: двух квадратов не хватит. Действительно, площадь всего прямоугольника делится на 4. И площадь любого квадрата с чётной стороной тоже делится на 4. А вот площадь квадрата с нечётной стороной на 4 не делится, и, более того, при делении на 4 площадь такого квадрата обязательно даёт остаток 1. Проще всего это проверить с помощью формулы $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ – два слагаемых делятся на 4, а последнее как раз и даёт остаток.

Если в разбиении будет только один квадрат с нечётной стороной, то сумма площадей всех квадратов в таком разбиении будет давать остаток 1 при делении на 4; если квадратов с нечётной стороной будет два, то сумма площадей всех квадратов будет давать остаток 2; если квадратов 3 – то и остаток 3. Таким образом, во всех этих случаях сумма площадей квадратов, т.е. площадь исходного прямоугольника, не будет делиться на 4. Поэтому нечётных квадратов не может быть меньше четырёх.

Пример разбиения, содержащего 4 квадрата, показан на рис. 2.

3. Ответ: 33 белых шарика.

Чтобы сразу описывать обе ситуации, будем называть цвета «меньший», «средний» и «больший» по количеству шариков. Заметим, что шариков «меньшего» цвета не может быть больше 32. Потому что если «меньших» шариков 33 или больше, то «средних» шариков не меньше 34, а «бóльших» шариков не меньше 35. Но $33 + 34 + 35 > 100$, значит, это невозможно. Аналогично шариков «бóльшего» цвета не менее 35 (потому что $34 + 33 + 32 < 100$). Таким образом, в первый раз красных шариков было 35 или больше, а во второй раз 32 или меньше. Количество красных шариков могло измениться только за счёт того, что некоторые из них были волшебные. Поскольку волшебных шариков всего три, описанные события могли состояться только в том случае, если в первый раз было ровно 35 красных шариков (среди них 3 – волшебные), а во второй волшебные шарики стали зелёными и красных шариков стало 32. Аналогично, зелёных шариков в первый

Эта задача относится к типу «оценка плюс пример». Для доказательства ответа необходимо проверить, что любое разбиение на квадраты содержит не меньше 4 нечётных квадратов (это и есть *оценка*), и, кроме того, нужно привести *пример* разбиения, где используется ровно 4 нечётных квадрата.

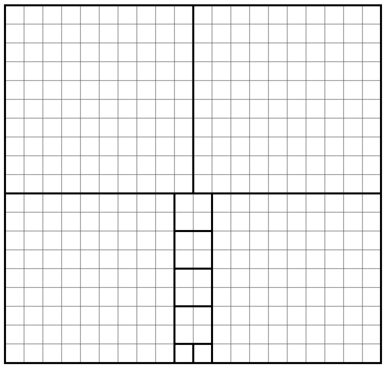

Рис. 2.

По условию задачи совершенно не ясно, что ответ однозначно определён. Наоборот, кажется вероятным, что могло бы быть несколько ситуаций, удовлетворяющих условию. Поэтому вопрос *сколько* следует понимать так: найдите все возможные ответы и докажите, что других нет. К сожалению, многие школьники на олимпиаде ограничились тем, что нашли пример, удовлетворяющий условию задачи. Конечно, такие «решения» не засчитывались.

раз было 32, а во второй раз 35. И тогда, как нетрудно подсчитать, число белых шариков оба раза было равно 33.

4. Ответ: нет, первая фраза не может быть произнесена нечётное число раз.

Поскольку всего имеется 50 джентльменов, у каждого джентльмена количество знакомых и количество незнакомых в сумме дают 49. Это значит, что если у джентльмена нечётное число знакомых, то у него чётное число незнакомых.

Если джентльмен имеет чётное число знакомых, то он говорит им первую фразу, а остальным вторую, в этом случае он произносит первую фразу чётное число раз. Если же джентльмен имеет нечётное число знакомых, то знакомым он говорит вторую фразу, а незнакомым (число которых чётно!) говорит первую, и в этом случае получается, что первая фраза произнесена тоже чётное число раз. Значит, каждый джентльмен произносит первую фразу чётное число раз вне зависимости от того, сколько у него знакомых.

Значит, первая фраза должна быть произнесена чётное число раз.

5. Ответ: через 20 минут. Очевидно, что сначала самая быстрая стрелка (150-я) догонит самую медленную (1-ю), потом вторая по скорости (149-я) догонит вторую по медленности (т.е. 2-ю) и т.д. Таким образом, 74-я стрелка отвалится, когда столкнется с 77-й. Начальное расстояние между стрелками – 1 оборот, скорость сближения равна $77-74=3$ оборота в час, значит, стрелки встретятся через $\frac{1}{3}$ часа.

6. Пусть за Винтика проголосовало v человек, за Шпунтика s человек. Не будем пользоваться процентами, вместо этого будем писать соответствующие дроби: 10% – это 0,1; 146% – это 1,46 и т.п. Вычисляя долю голосов за Винтика, Незнайка взял дробь $\frac{v}{v+s}$. Далее он прибавил к ней долю голосов, отданных за Шпунтика и Кнопочку. Поскольку эти вычисления он делал правильно, эта доля не превосходит 1. В сумме Незнайка получил 1,46. Следовательно,

$$\frac{v}{v+s} > 0{,}46.$$

Домножим на знаменатель и соберём слагаемые, содержащие v, в левой части. Получится неравенство $0{,}54v > 0{,}46s$. Вспомнив, что $s > 1000$, получаем, что

$$v > \frac{0{,}46}{0{,}54}s > \frac{0{,}46}{0{,}54} \cdot 1000 > 851.$$

Художник Сергей Чуб