НАШ КОНКУРС («Квантик» № 3)

11. *Профессор написал на доске шесть утверждений:*

Сегодня на моей лекции будет меньше 10 студентов.
Сегодня на моей лекции будет больше 10 студентов.
Сегодня на моей лекции будет меньше 20 студентов.
Сегодня на моей лекции будет больше 20 студентов.
Сегодня на моей лекции будет меньше 30 студентов.
Сегодня на моей лекции будет больше 30 студентов.

На лекцию пришло N студентов, после чего профессор написал для каждого своего утверждения, верное оно или нет. Оказалось, что ровно четыре утверждения оказались неверными. Чему равно N? Укажите все возможные ответы.

Ответ: 10, 20 или 30.

Несложно проверить, что значения $N=10$, 20 и 30 подходят. Докажем, что других ответов нет. Если неверных утверждений четыре, то верных – два. Если $N<10$, то и $N<20$, и $N<30$ – получаем три верных утверждения, чего быть не может. Значит, $N\geqslant 10$. Аналогично доказываем, что $N\leqslant 30$. Если $10<N<20$, то верны 2-е, 3-е и 5-е утверждения, а если $20<N<30$, то верны 2-е, 4-е и 5-е утверждения, что невозможно.

12. *В классе у Коли столько же детей, сколько в классе у Оли. Коля говорит Оле: «У нас в классе мальчиков вдвое больше, чем у тебя». А Оля отвечает: «Зато у нас девочек втрое больше, чем у тебя». Могло ли такое быть? (Коля и Оля себя тоже посчитали).*

Ответ: могло.

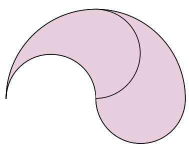
Например, в классе у Коли 24 мальчика и 6 девочек, а в классе у Оли 12 мальчиков и 18 девочек: $24=2\cdot 12$, $18=3\cdot 6$, $24+6=12+18=30$.

13. *Перед вами рисунок «капли» – верхняя граница состоит из полуокружности радиуса 2, а нижняя граница – из двух полуокружностей радиуса 1 (одна «смотрит» внутрь капли, а другая – наружу). Разрежьте каплю*

а) на две одинаковые части;

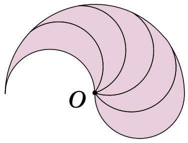
б) на три одинаковые части;

в) можно ли разрезать её на 100 равных частей?



На рисунке изображён пример разрезания капли на 2 одинаковые части.

По аналогии строится пример разрезания и на N одинаковых частей. Обозначим через O центр большой полуокружности. Заметим: если повернуть левую маленькую полуокружность вокруг O на 180° (по часовой стрелке), получится правая маленькая полуокружность. При этом след от поворота заметёт всю каплю. Будем поворачивать полуокружность поэтапно: сначала повернём её на $180/N$ градусов, потом ещё на столько же, и так далее, пока она не повернётся на 180°. Следы от вращения полуокружности на каждом этапе равны – так капля разделится на N одинаковых частей. На рисунке приведён пример для $N=5$.



14. *В таблице 10×10 клетки окрашены в 9 цветов. Если в некоторой строке или в некотором столбце находятся две клетки одного цвета, то можно перекрасить этот столбец или эту строку в этот цвет. Из любого ли исходного положения можно всю таблицу перекрасить в один цвет?*

Ответ: да, из любого.

Заметим, что в каждой строке найдётся пара клеток одного цвета, так как клеток в строке 10, а цветов всего 9. Тогда сделаем каждую строку одноцветной. Опять же, строк 10, а цветов 9, значит, среди строк найдутся две строки одного цвета. Теперь покрасим в этот цвет каждый столбец и получим одноцветную таблицу.

15. *Бизнесмен заключил с чёртом соглашение: каждый день бизнесмен даёт чёрту одну купюру, а взамен получает любое число купюр, какое захочет, но меньшего достоинства. Другого источника купюр у бизнесмена нет. Докажите, что в какой-то момент бизнесмен разорится (сколько бы купюр ни было у него вначале и как бы он ни менял их у чёрта).*

В задаче предполагается, что бизнесмен бессмертен (иначе он может не дожить до своего разорения).

Предположим, у бизнесмена есть стратегия, согласно которой он каждый день сможет отдавать купюру, и никогда не разорится. Заметим, что самые крупные имеющиеся у бизнесмена купюры от чёрта он получать не может. Поэтому в какой-то день они у него либо кончатся, либо он никогда больше не будет отдавать их чёрту. Во втором случае разменяем оставшиеся самые крупные купюры на более мелкие – стратегию это не испортит. С этого дня у бизнесмена какие-то более мелкие купюры станут самыми крупными. Аналогично, в какой-то момент у бизнесмена кончатся и они (либо он перестанет ими расплачиваться – тогда снова обменяем их на более мелкие). Рассуждая дальше аналогично, видим, что достоинство самых крупных купюр у бизнесмена постепенно падает. Наступит момент, когда у бизнесмена кончатся и самые мелкие купюры, и тогда он разорится.

РЭНДЗЮ («Квантик» №4):

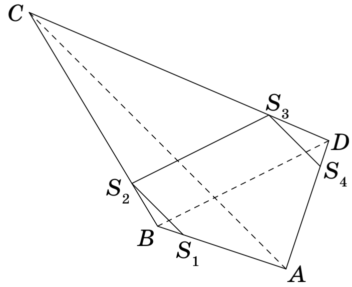
Решение будет опубликовано позже.

ПОЛОВИНА ИЛИ НЕТ? («Квантик» №4)

Квантик отметил уровень молока, приложив палец к бутылке. Потом перевернул бутылку и сравнил новый уровень молока со старым. Если они совпали, то в бутылке ровно половина молока. Этим способом можно также определить, больше половины молока в бутылке или меньше.

НОВЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ БУРАТИНО

1. Пусть Буратино гулял по четырёхугольному лесу $ABCD$, начав из точки S_1 на стороне AB и проходя через точки S_2, S_3, S_4 и S_5 на сторонах четырёхугольника. Докажем, что $S_1=S_5$. Пусть S_1 делит сторону AB в отношении $x:y$, то есть $AS_1:BS_1=x:y$. По теореме Фалеса $BS_2:CS_2=BS_1:AS_1=y:x$, так как S_1S_2 параллельно AC. Значит, S_2 делит сторону BC в отношении $y:x$. Рассуждая аналогично, получим, что S_3 делит CB в отношении $x:y$, S_4 делит DA в отношении $y:x$, S_5 делит AB в отношении $x:y$. Значит, $S_1=S_5$.



2 и **3**. Как и в решении предыдущей задачи, рассмотрим точки, в которых Буратино меняет направление движения. Найдём, как меняется отношение, в котором очередная точка делит сторону треугольника. Если изначально отношение было $x:y$ (где $x\neq y$), то на следующей стороне оно будет $y:x$, потом $x:y$, а когда он вновь вернётся на исходную сторону – $y:x$. Пройдя ещё три отрезка пути, Буратино попадёт в точку, которая делит сторону в отношении $x:y$, то есть вернётся в исходную точку.

Если же изначально $x:y=1:1$, то Буратино стартовал с середины стороны треугольника, и он вернётся в исходную точку, пройдя три отрезка пути.

ДОЖДЬ В ЛЮКСЕМБУРГЕ

■ Номеров, у которых левые числа больше правых, ровно столько же, сколько и номеров, у которых правые числа больше левых. К примеру, у номера 37-61 обязательно есть пара 61-37.

■ Проще посчитать количество номеров, в которых нет повторяющихся цифр. Первая цифра номера может быть любой из десяти цифр. Вторая цифра может быть любой, кроме уже выбранной первой. Таких цифр девять. Третья цифра может быть любой, кроме уже выбранных первой и второй. Таких цифр восемь. На долю четвёртой остаётся семь цифр. Количество номеров N, в которых нет повторяющихся цифр, определяется произведением:

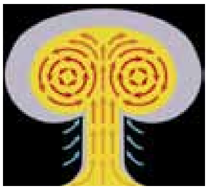
$$N=10\cdot9\cdot8\cdot7=5040.$$

Всего же номеров, очевидно, 10000. Значит, номров, в которых есть одинаковые цифры – 4960.

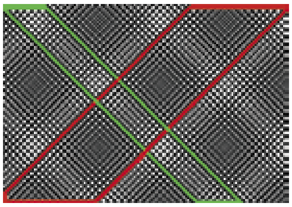
■ Под машиной блондинки сухой асфальт – это значит, что во время дождя машина стояла на месте.

ДВОЙНОЙ ВЫХЛОП

Будь перед вами настоящая труба, а не изображение, вы бы заметили одну подсказку. Эти «две» струи вращаются так, что между ними воздух поднимается, а по краям спускается. А посмотрев на трубу с другой стороны, вы бы увидели, что сверху струя не выглядит распавшейся на две. Всё это очень похоже на выворачивающуюся шляпку дымового «гриба» от большого взрыва, только растянутую. Неспроста: в обоих случаях воздух посередине остывает медленнее, поэтому он поднимается быстрее, всплывает. Всплывая, он затягивает снизу в середину струи прозрачный воздух, который «делит пополам» нашу струю.



ПРИЗРАЧНЫЕ УЗОРЫ



Та решётка, что находится к нам ближе, выглядит для нас немного крупнее. Из-за этого какие-то линии дальней решётки оказывается почти точно за линиями ближней, а где-то наоборот, видны обе решётки. В первом случае мы видим больше светлого фона, чем во втором. Поэтому совпадающие линии решёток дают светлую полосу. Одна из таких полос отмечена зелёным на рисунке. А в красном выделении видны проволоки обеих решёток, такое место выглядит темнее.

НОЧНЫЕ КРОВОПИЙЦЫ, КУДРЯШКИ И ПОДВОДНЫЕ ЛОДКИ

Шерсть и волосы не отражают, а поглощают ультразвуковые волны, поэтому летучие мыши их просто не замечают и могут случайно влететь и запутаться.

ДУГА ИЗ ПИКСЕЛЕЙ

Ответ: 201.

Пойдём по дуге снизу вверх. При этом с каждого пикселя мы будем переходить либо на его верхнего соседа, либо на соседа справа, то есть «делать шаг» вверх или вправо. Пройдя дугу, мы переместимся ровно на 100 пикселей вправо и на 100 пикселей вверх. Поэтому всего мы, идя по дуге, сделали 200 «шагов», пройдя по 201 пикселю.

Можно было бы подумать, что количество пикселей примерно равно длине дуги. Это совершенно не так: длина четверти окружности радиуса R равна $\pi\cdot R/2\approx1{,}57\cdot R$, а пикселей дуга пересекает $2R+1$. В нашем случае длина дуги примерно равна 157.