СМОТРИ!

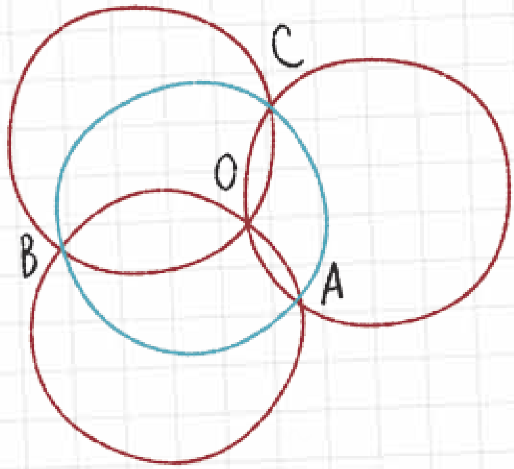
Григорий Фельдман

КУБ ИЗ НИОТКУДА

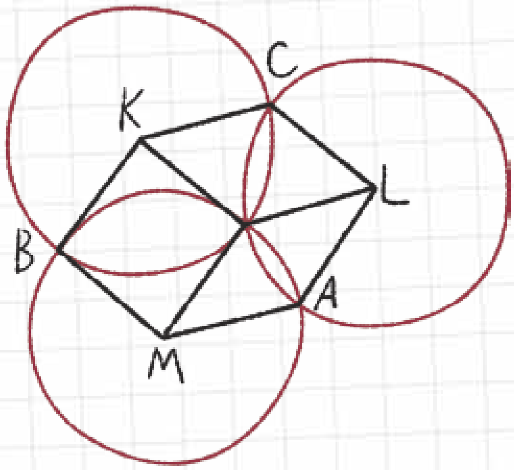
В «Квантике» №4 за 2012 год мы рассказывали об одной красивой теореме:

Теорема Джонсона

Три равные красные окружности проходят через одну точку. Тогда радиус синей окружности, проходящей через точки A, B, C, равен радиусам красных окружностей.

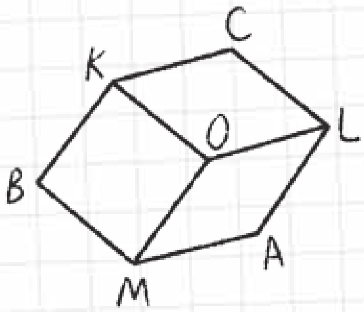


Сейчас мы расскажем об одной красивой идее доказательства.* Отметим центры красных окружностей и проведём радиусы к точкам пересечения:



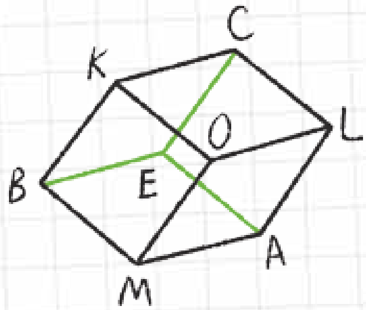
Давайте теперь сотрём окружности, оставив только проведённые отрезки. Они все равны (как радиусы равных окружностей).

* С ней автор познакомился в заметке военного из Сингапура Chua Hsieh Li



Знакомая картинка? Это же кубик!

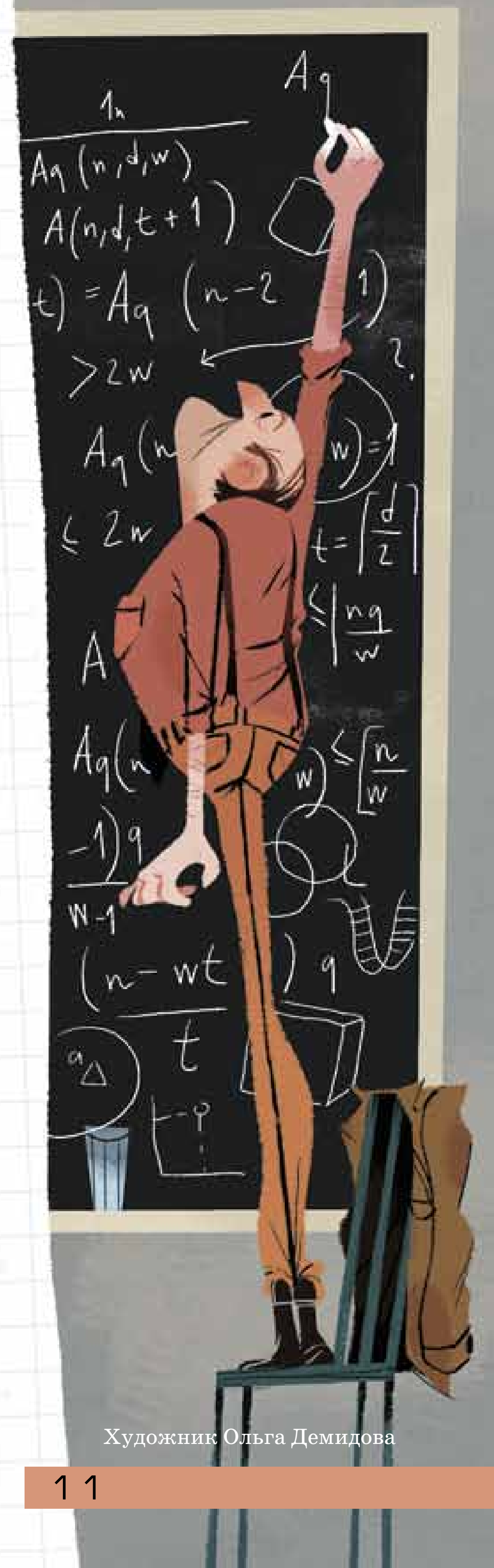
В кубике обычно рисуют ещё и невидимые линии. Проведём их:



Невидимые отрезки наверняка равны видимым, а тогда теорема доказана! Ведь в таком случае точка E – центр синей окружности, а раз зелёные отрезки равны чёрным, радиус синей окружности равен радиусу красной.

Приведём строгое доказательство. Определим точку E так: проведём из точки C отрезок CE, параллельный сторонам BK и LA и равный им. Далее воспользуемся замечательным фактом: если в четырёхугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то это параллелограмм. Получаем, что $BKCE$ – параллелограмм и $ALCE$ – параллелограмм. Но тогда и $AMBE$ – параллелограмм (его противоположные стороны параллельны). У каждого из трёх наших параллелограммов противоположные стороны разных цветов. Но в параллелограмме противоположные стороны равны. Так как все чёрные отрезки равны друг другу, получаем, что и все зелёные отрезки равны чёрным, что и требовалось!

Об этом приёме – рассмотрении шестиугольника с параллельными противоположными сторонами – мы уже писали в статьях «Удивительные числа» («Квантик» №1 за 2012 год) и «Разрезания шестиугольника на бантики» («Квантик» № 3 за 2014 год). Каждый раз этот приём приводит к неожиданным и красивым рассуждениям. Если и вам удастся найти его интересное применение – напишите нам на адрес kvantik@mccme.ru



Художник Ольга Демидова