

■ НАШ КОНКУРС («Квантик» № 7)

31. В двух сосудах находится по 1 л воды. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нём воды во второй сосуд, затем из второго переливают треть имеющейся в нём воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нём воды во второй и так далее. Сколько воды окажется в каждом сосуде после 100 переливаний?

Ответ: по 1 л.

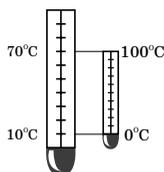
Докажем, что после каждого второго переливания в сосудах снова будет по 1 л воды. Действительно, если в сосудах по 1 л, и из первого переливают во второй $\frac{1}{n}$ часть (что равно $\frac{1}{n}$ л), то во втором сосуде окажется $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ л. Затем из второго сосуда переливают обратно $\frac{1}{n+1}$ часть, то есть $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n}$ л, и в нём снова окажется 1 л.

32. Поверхность деревянного куба целиком окрасили. Затем куб распилили на несколько одинаковых кубиков. Оказалось, что среди них есть кубики с одной окрашенной гранью, причём их столько же, сколько кубиков, у которых все грани не окрашены. На сколько кубиков распилили куб?

Ответ: $8^3 = 512$.

Пусть куб имеет размеры $N \times N \times N$. На каждой грани на границу куба выходят $(N-2) \cdot (N-2)$ кубиков, у которых ровно одна грань окрашена; всего таких кубиков будет $6(N-2)^2$. А неокрашенные кубики составляют куб со стороной $N-2$ внутри нашего куба, то есть их $(N-2)^3$. Получаем равенство $6(N-2)^2 = (N-2)^3$. Заметим, что $N \neq 2$ (иначе кубиков, у которых все грани не окрашены, нет). Тогда равенство можно поделить на $(N-2)^2$ и получить $6 = N-2$, откуда $N=8$.

33. Два ртутных термометра висят так, как показано на рисунке. При какой температуре столбики ртути в них будут оканчиваться на одной высоте?



Ответ: при 25 градусах.

60 делений на левом термометре суммарно составляют такую же длину, как и 100 делений на правом термометре, то есть три деления на левом термометре равны по длине пяти делениям на правом.

Пусть столбики ртути оканчиваются на одной высоте при x градусах. Тогда $x - 10$ делений на левом термометре имеют такую же длину, как x делений на правом, откуда $\frac{x-10}{3} = \frac{x}{5}$, и значит $5x - 50 = 3x$, $2x = 50$, $x = 25$.

34. Двое по очереди переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперёд. Вначале часовая стрелка указывает на 6, победителем считается тот, после чьего хода она укажет на 12. (Стрелка может сделать несколько оборотов, прежде чем остановится на числе 12.) Кто из игроков – начинающий или его соперник – может обеспечить себе победу, и как ему играть?

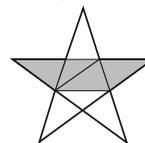
Ответ: выигрывает начинающий.

Заметим, что если стрелка указывает на числа 9 или 10, то игрок, у которого сейчас ход, выиграет – назовём эти числа выигрышными. Если стрелка указывает на число 7, то следующий ход неизбежно приведёт

к выигрышной цифре, и соперник следующим ходом выиграет. Назовём число 7 проигрышным. Аналогично, 5 и 4 выигрышные – с них можно попасть на проигрышное 7, число 2 проигрышное (с него есть ходы только на выигрышные 5 и 4), 11 выигрышное, 8 проигрышное, откуда начальное число 6 – выигрышное.

Покажем теперь, как выиграть начинающему. Первым ходом он переводит стрелку на 8 (говоря кратко, ходит на 8). Если далее второй ходит на 10, то первый ходит на 12 и выигрывает. Если же второй ходит на 11, то первый ходит на 2. Далее второй может сходить на 4 или 5, после чего первый ходит на 7. Далее у второго есть ходы только на 9 или 10, после чего первый выигрывает.

35. Докажите, что у правильной пятиконечной звезды, изображённой на рисунке, закрашена ровно половина площади.



Наша пятиконечная звезда состоит из правильного пятиугольника – центральной части звезды, и примыкающих к нему пяти треугольников – будем называть их лучами звезды.

Проведём в центральном пятиугольнике две диагонали, как на рисунке. Они делят его на два одинаковых маленьких треугольника и один побольше. Тот, что побольше, равен примыкающему лучу звезды, поскольку вместе с ним образует параллелограмм – это следует из того, что в правильном пятиугольнике диагональ параллельна противоположной стороне.

Итак, окрашенная часть звезды состоит из трех больших треугольников, равных лучам звезды, и одного маленького. И неокрашенная часть тоже состоит из трёх лучей звезды и одного маленького треугольника. Значит, окрашена ровно половина площади звезды.

■ КАК ШАРИК ОКАЗЫВАЕТСЯ В БОКАЛЕ? («Квантик» № 8)

Крутя бокал, мы всё время давим его стенками на мяч, чтобы тот кружился внутри бокала. Около горлышка стенки сужаются и из-за своего наклона давят на мяч не только вбок, но и вверх. По-другому можно ответить «с точки зрения мяча». Его, как в центрифуге или на карусели, сильно прижимает к стенке бокала, выдавливая в самую дальнюю от оси бокала область.

Для бокала с расширяющимся горлышком этот способ не годится: шарик будет выталкиваться из бокала.

■ ПУГАЛА В ОГОРОДЕ («Квантик» № 8)

Первое поле. Ясно, что одного пугала не хватит, а двух достаточно – смотрите пример на рисунке 1.

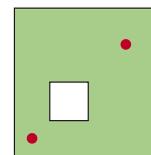


Рис. 1

Второе поле. Одно пугало видит меньше, чем половину окружности стога. Поэтому двух пугал не хватит (на рисунке 2,а приведён пример, где зелёным отмечены участки, из которых пугала не видны). Пример, как обойтись тремя пугалами, показан на рисунке 2, б.

Интересно, что число необходимых пугал зависит от соотношения радиусов поля и стога внутри него (например, для поля на рисунке 3 меньше пяти пугал не хватит). Попробуйте найти эту зависимость.

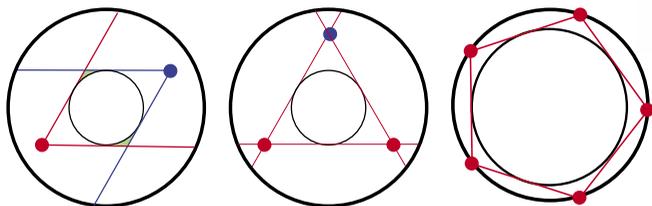


Рис. 2, а

Рис. 2, б

Рис. 3

Третье поле. Ясно, что в каждой из двух отмеченных красным частей на рисунке 4, а должно находиться хотя бы одно пугало. Значит, пугало не меньше двух. А двумя обойтись можно – пример показан на рисунке 4, б.

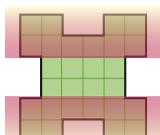


Рис. 4, а

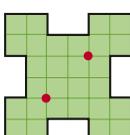


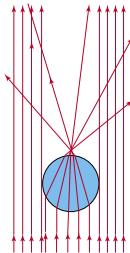
Рис. 4, б

Задачу с этими тремя полями придумал Евгений Епифанов. В его статье по адресу <http://elementy.ru/problems/751>, а также в главе «Как охранять музей» книги М. Айгнера и Г. Циглера «Доказательства из книги», по которой и написана статья, можно прочитать много интересного про общую задачу для многоугольных полей.

■ ТЕНИ

Давайте для начала разберёмся с бутылкой. Она работает как выпуклая линза: хоть и пропускает солнечные лучи, но при этом их перенаправляет, как показано на рисунке.

В результате из того светового потока, что должен был попасть за бутылку, почти весь свет сворачивает в стороны. Потому за бутылкой и получается тень.



Внимательные читатели могут заметить на фото с бутылкой слабо различимую дугу на асфальте, проходящую вертикально через тень бутылки – это немного виден «след» от света, попавшего на бутылку и «разметавшегося» в разных направлениях.

С пламенем стоит разобраться подробнее. Откуда берётся его свет? Это не отражённый свет солнца (или ещё чего-то), как у большинства предметов быта – иначе огонь не было бы видно в темноте. Пламя светится собственным светом, как и другие раскалённые предметы – металл в кузнице, или электроплитка или солнце...

Мы видим языки пламени, потому что от горящего предмета отлетают частички, раскалённые и потому светящиеся. Это недогоревшее топливо образует сажу или копоть. Пламя может быть очень ярким и при ничтожном количестве распылённой сажи, пропуская свет практически без помех. Правда, горячий воздух огня тоже немного изменяет направление проходящего света, как линза неправильной формы. Поэтому немного рябит изображение, на которое мы смотрим сквозь струю горячего дыма.

■ УДАЧНЫЙ ГОРОСКОП

Общая стоимость всех покупок обязана делиться на 3. Вова отдал кассирше одну бумажную купюру. Это могли быть 10, 50, 100, 500, 1000 или 5000 рублей, или, соответственно, в 100 раз больше копеек. Ни одно из этих чисел на 3 не делится. Значит, должна быть сдача.

Скорость света 300000 км/с. Если водитель всё объяснил верно, то он сильно превысил допустимую скорость, хотя, конечно, ни один космический корабль, не говоря уже про автомобиль, такой скорости развить не может.

■ КЭРРОЛЛ, МЕНДЕЛЕЕВ И ХЕМИНГУЭЙ

История про автоответчик выдумана. В те времена не было телефонов, они появились лишь лет через 20. Но в книжках Кэрролла встречается птица Додо.

■ СТАРЕЙШИЙ, ИЗВЕСТНЕЙШИЙ ОПЫТ

В отличие от первого переворота, при обратном перевороте стык бокала и картонки смочен. Водяная прослойка вдоль кромки бокала не даёт воздуху проникнуть внутрь, а ещё немного притягивает картонку из-за поверхностного натяжения. И тут снова вступает в игру главный герой – атмосферное давление. В начале опыта мы непроизвольно чуть вдавливаем крышечку внутрь сосуда, будь она из бумаги или пластика. Внутри давление воздуха оказывается немного меньше атмосферного, вот эта-то разница и помогает успеху эффектной демонстрации. Переворот со смоченной картонкой получается в обе стороны без поддержки рукой, пока картонка ещё не размякла.

■ ПОРТРЕТ

Пронумеруем фигуры на портрете слева направо 1, 2, 3, 4. Ровно одно из двух пожеланий каждой сестры исполнено, поэтому Элиза может быть номером 1 или 4, Дороти – номер 1 или 3, Берта – номер 2 или 4, Клара – номер 3 или 4. Значит, номер 2 – это Берта. Кроме того, Элиза и Дороти – совершенно одинаковы на портрете, значит, Дороти – номер 3, а Элиза – номер 1 и Клара – номер 4.

■ РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК

1. *Ждать* (чего?) *полднѣ* значит 'ждать того момента, когда настанет полдень'. А *ждать* (сколько?) *полднѣ* значит 'ждать в течение половины дня'. **Ответ:** (В).

2. Другие слова с приставкой *вос-*, например, *восходить* или, с чередованием, *возносить*, показывают, что она обозначает движение вверх. **Правильный ответ:** (А).

Ответу (Д) тоже соответствует слово, существующее в русском языке: *расхитить* «разворовать».

3. Засвидетельствованная в памятниках система счёта до сих пор сохранилась в русском языке при обозначении времени: *полшестого* (из **пол шестого часа*) – это пять часов и ещё половина следующего, шестого. При этом в древнерусском языке прилагательные и порядковые числительные могли склоняться и выступать как определения не только в полной, но и в краткой форме. Так возникло слово *полтора/-ы* (из **пол втора/-ы*) – половина второго/-ой, т.е. один/одна, о которой можно не упоминать, и ещё половина. Таким образом, *пол пѣты гривны* – это четыре гривны и ещё половина, т.е. четыре с половиной гривны. **Ответ:** (Б).

4. Книга может начинаться с предисловия и может заканчиваться послесловием или эпилогом, это общепринятые слова для вводной или заключительной частей книги. А вот Борис Заходер вводит нас в свою «Страну Вообразилию» через ПРИДИСЛОВИЕ и выводит через УЙДИСЛОВИЕ. Эти необычные названия основаны на языковой игре, их не найдёшь в словаре, как нельзя найти и само название воображаемой страны – Вообразилия. **Ответ:** (А).