Андрей Щетников

О Книге с большой буквы, о несоизмеримости стороны и диагонали квадрата и о настоящем удовольствии

Есть такая книга про математику, которая называется «Доказательства из Книги»*. Её написали Мартин Айгнер и Гюнтер Циглер, а идею придумал замечательный венгерский математик Пауль Эрдеш. Эрдеш любил говорить, что «у Бога есть Книга, в которую он включает совершенные доказательства математических теорем. Математик, конечно, не обязан верить в Бога – но он обязан верить в эту Книгу».

Я уже много лет занимаюсь историей математики. И если бы меня спросили, какое самое древнее известное мне доказательство заслуживает того, чтобы быть включённым в Книгу с большой буквы, я бы сказал: конечно же, это доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. Мы не знаем имени математика, который открыл эту несоизмеримость; нам известно лишь то, что он жил в Древней Греции в V веке до нашей эры и был одним из учеников Пифагора.

«Чем же замечательно это доказательство?» – спросите вы. Я отвечу на этот вопрос так. Во-первых, открытие, которое сделали пифагорейцы, стало колоссальным стимулом для развития математики, вплоть до наших дней. Сколько ни рассматривай квадрат и его диагональ, несоизмеримости его стороны и диагонали глазами не увидишь; её можно постичь лишь рассуждением. И начиная с этого открытия, рассуждение приобрело в математике главенствующую роль. Во-вторых, придуманное пифагорейцами доказательство очень красивое и простое. Так что давайте рассмотрим его и включим в свою собственную Книгу, поместив его там на самой первой странице.

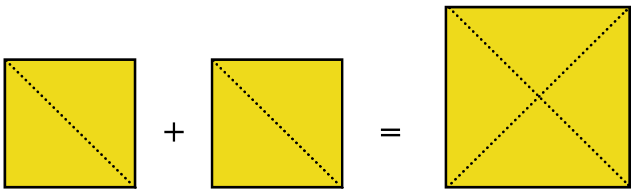
Надо сразу же сказать, что пифагорейцы не собирались открывать несоизмеримость: они искали общую меру стороны и диагонали квадрата, а вместо этого наткнулись на неожиданное свойство этих отрезков и очень ему удивились! Знаменитый древнегреческий философ Аристотель рассказывает об этом так: «Все начинают с удивления, как удивляются, например, загадочным самодвижущимся игрушкам, или солнцеворотам, или несоизмеримости диагонали

* М. Айгнер, Г. Циглер. Доказательства из Книги (перев.с англ.). – М.: «Мир», 2006. Новое издание готовится в издательстве «БИНОМ. Лаборатория знаний».

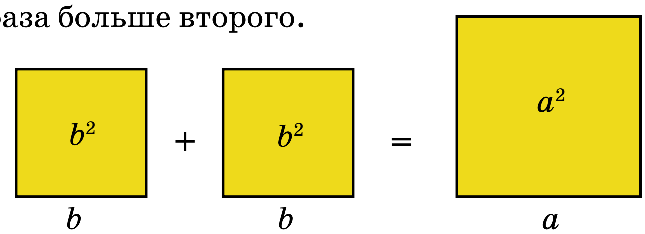
(ибо всем, кто ещё не усмотрел причину, кажется удивительным, если что-то нельзя измерить самой малой мерой). А под конец нужно прийти к противоположному – и к лучшему, как говорит пословица: ведь ничему бы так не удивился человек, сведущий в геометрии, как если бы диагональ оказалась соизмеримой».

Первое доказательство

Возьмём два равных квадрата, каждый из них разрежем по диагонали на два треугольника и составим из получившихся четырёх треугольников один квадрат, как показано на рисунке. Сторона этого нового квадрата будет равна диагонали исходного квадрата. Дальше нам будет удобнее говорить не про исходный квадрат и квадрат на диагонали, но про два квадрата, один из которых вдвое больше другого по площади.

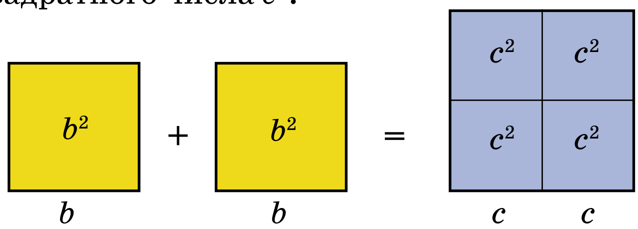


Общая мера двух величин – это такая величина, которая укладывается в обеих величинах целое число раз. Допустим, что общая мера сторон рассматриваемых квадратов существует. Мысленно уложим её в сторонах обоих квадратов и расчертим эти квадраты на мелкие квадратики, проведя параллельные линии через отмеченные точки. Конечно, это действие мы можем делать лишь условно – ведь мы не знаем, на сколько частей надо делить стороны квадратов! Для таких условных действий у нас есть буквы: допустим, что искомая общая мера уложилась a раз в стороне квадрата двойной площади и b раз в стороне квадрата единичной площади. В таком случае квадрат двойной площади разделится на a^2 мелких квадратиков, а квадрат единичной площади – на b^2 мелких квадратиков. И квадратные числа a^2 и b^2 таковы, что первое из них в два раза больше второго.



Заметим далее, что если вообще существуют пары квадратных чисел, одно из которых в два раза больше другого, то какая-то из этих пар является наименьшей. Эту наименьшую пару мы и будем искать.

Число a^2 является чётным, поскольку оно делится на две равные половины $b^2 + b^2$. Но тогда и число a тоже является чётным: ведь если бы a было нечётным, то нечётным было бы и a^2 как произведение двух нечётных чисел. Чётное число a состоит из двух равных половинок c. Поэтому квадратное число a^2 состоит из четырёх равных квадратных частей c^2. Отсюда следует, что квадратное число b^2 будет в два раза больше квадратного числа c^2.

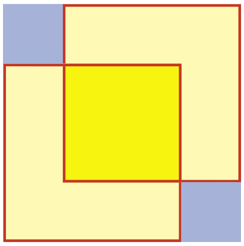


А теперь подумаем о том, к чему мы пришли! Искомая пара квадратных чисел (b^2, c^2) удовлетворяет условию «первое число в два раза больше второго», и она меньше пары (a^2, b^2). Однако ранее мы предположили, что пара (a^2, b^2) является *наименьшей*, удовлетворяющей данному условию. Мы пришли к противоречию, из которого есть единственный выход: надо признать, что двух квадратных чисел, одно из которых в два раза больше другого, вообще не существует. А следовательно, не существует и общей меры у стороны и диагонали квадрата, и эти два отрезка являются *несоизмеримыми*.

Второе доказательство

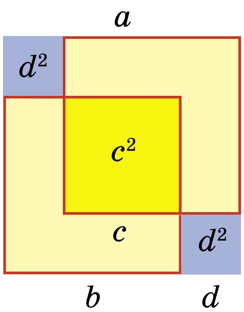
Один и тот же факт может иметь несколько разных доказательств, которые заслуживают включения в Книгу. Я готов поспорить, что если первое доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата вы почти наверняка уже видели, то второе доказательство вы увидите сейчас в первый раз. Нам неизвестно, знали ли такое доказательство древние греки – но во всяком случае они могли его знать, потому что все идеи, на которых оно основано, были им хорошо знакомы.

Снова возьмём два единичных квадрата и наложим их на квадрат двойной площади, разведя их по противоположным углам, как показано на рисунке. Единичные квадраты перекрываются в центре и оставляют непокрытыми два небольших квадрата по углам. Поскольку суммарная площадь двух единичных квадратов равна площади большого двойного квадрата, дважды перекрытый центральный квадрат занимает такую же площадь, что и два непокрытых квадрата.



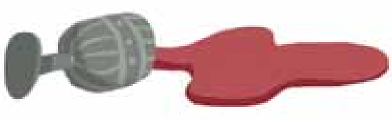
Это была геометрия, а теперь начнутся рассуждения о числах. Пусть искомая общая мера уложилась a раз в стороне квадрата двойной площади и b раз в стороне квадрата единичной площади. В таком случае будет $a^2 = 2b^2$, и мы опять будем искать наименьшую пару квадратных чисел (a^2, b^2), удовлетворяющую этому условию.

Вернёмся к чертежу: поскольку общая мера укладывается нацело в сторонах двойного и единичного квадратов, она также уложится нацело в сторонах углового и центрального квадратов (попробуйте объяснить, почему). Пусть соответствующий маленький квадратик уложится в центральном квадрате c^2 раз, а в угловом квадрате d^2 раз. Поскольку центральный квадрат в два раза больше углового, будет $c^2 = 2d^2$.



Мы опять столкнулись с тем же самым противоречием: мы предположили, что пара (a^2, b^2) является наименьшей, удовлетворяющей требуемому условию, но из этого предположения следует, что существует меньшая пара (c^2, d^2), удовлетворяющая этому же условию. Какие отсюда надо сделать выводы, мы уже знаем.

Надеюсь, что красота и сила рассмотренных доказательств заставила вас почувствовать некоторое удовольствие. Кстати сказать, Аристотелю, о котором мы сегодня уже вспоминали, принадлежат такие слова: «Удовольствию от питья противоположно страдание от жажды, но удовольствию от рассмотрения того, что диагональ несоизмерима со стороной, ничего не противоположно».



Художник Ануш Микаелян