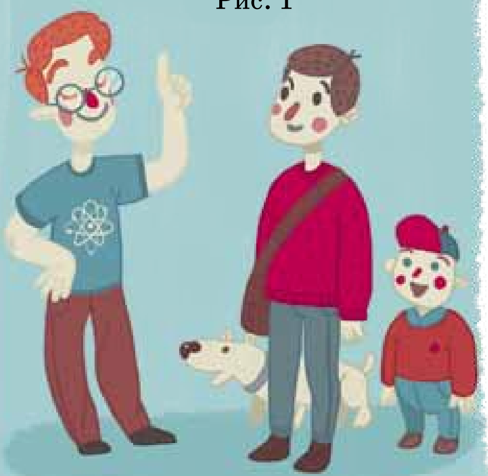
В. Крупский, А. Орлов

КОЗА НА ПРИВЯЗИ

Ранее публиковалось в журнале «Квант» № 5 за 1974 год.

После окончания занятий в вечерней математической школе, когда последние школьники уже ушли домой, мы увидели забытую кем-то тетрадь. Это был дневник без имени автора. Записи показались нам интересными, и мы решили напечатать выдержку из дневника.

Рис. 1



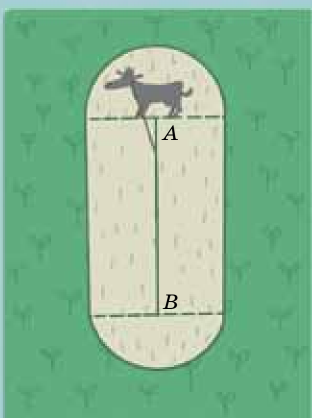


Рис. 2

...Козы прожорливы и съедают всё, до чего могут дотянуться. Мой приятель ловко использовал это обстоятельство. Он жил в деревне и хорошо знал грибные места. Но когда приходили друзья и спрашивали, куда пойти завтра за грибами, он отвечал: «Коза покажет». В самом деле, к вечеру его коза съедала траву на участке в форме стрелки, направленной к самому грибному месту (рис. 1). Мне стало интересно, как это у него получается. Вчера я рассказал об умной козе моему соседу-математику, и вот что он мне ответил.

Математик. – Это совсем не так сложно, как ты думаешь. Давай разбираться с самого начала. Если в поле привязать козу к колышку десятиметровой верёвкой, то она съест траву, конечно, в круге радиуса 10 метров. Попробуем привязать её по-другому. В точках A и B вобьём колышки, между ними натянем верёвку. У второй верёвки один конец закрепим на ошейнике козы, а на другом конце сделаем петлю, которая будет скользить по первой верёвке. Теперь коза сможет съесть траву на участке, состоящем из прямоугольника и двух полукругов с центрами в точках A и B (рис. 2). Расстояние от точки границы «выеденного» участка до первой верёвки всегда равно длине второй верёвки.

Я. – А что такое «расстояние от точки до верёвки»? Ведь можно измерять расстояние от точки M до точки A, или до точки B, или до какой-нибудь внутренней точки C отрезка AB (рис. 3). Всё время мы будем получать разные результаты.

Математик. – Расстоянием от точки M до отрезка называется наименьшее из расстояний от точки M до точек отрезка. На рисунке 3 расстоянием от точки M до отрезка AB является длина отрезка MA, потому что MA – наименьший из отрезков, соединяющих точку M с точками отрезка AB. Если же основание C' перпендикуляра, опущенного на прямую AB из точки M', попадает в отрезок AB, то в качестве расстояния от M' до AB надо взять длину этого перпендикуляра $M'C'$.

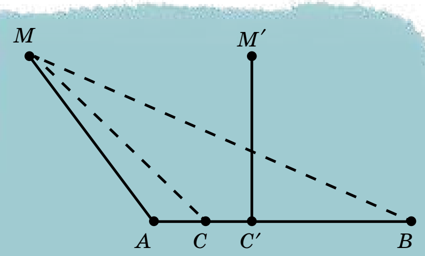


Рис. 3

Теперь попробуем «ограничить» козу прямоугольным участком. Постараемся использовать предыдущий результат. Вбив колышки в точках A и B и привязав козу, как мы делали раньше, ограничим ее уже знакомой фигурой, которую нарисуем чёрным карандашом (рис. 4). Если вбить колышки в точках C и D, то козе придётся питаться внутри фигуры, обведённой красным. Как ты думаешь, что будет, если мы к ошейнику козы привяжем две верёвки, по одной «от каждой фигуры»?

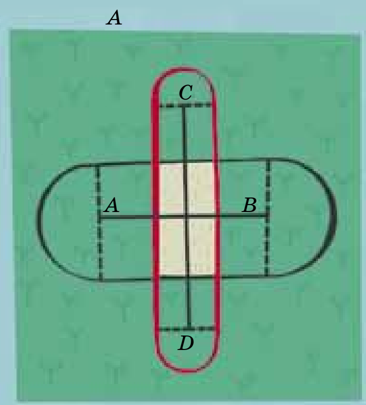


Рис. 4

Я. – Здорово придумано! Теперь она будет есть траву только внутри общей части чёрной и красной фигур, то есть внутри белого прямоугольника.

Математик. – Да, так и получится. Математики называют общую часть двух фигур их пересечением. Всегда, когда мы сумеем при помощи верёвок и колышков ограничить козу какими-то двумя фигурами, мы сможем ограничить её и пересечением этих фигур. Просто надо к ошейнику козы привязать верёвки и «от первой», и «от второй» фигур.

Я. – Но если козу привязать к колышку десятиметровой верёвкой, то она, вытянув шею, доберётся до травы, которая растёт дальше, чем в десяти метрах. Шея-то у неё длинная!

Математик. – Ты прав. Мы упрощаем дело – строим математическую модель. Например, мы считаем, что земля ровная, коза съедает всю траву, до которой может дотянуться, причём коза маленькая, а верёвки длинные, так что мы изображаем козу точкой.

Я. – И считаем, что верёвки не растягиваются и скользят друг по другу. И ещё – очень важно! – что коза не запутывается в верёвках и может перепрыгнуть через них.

Рис. 5

Математик. – Совершенно верно. Теперь вернёмся к твоему приятелю. Стрелка – это пересечение параллелограмма и прямоугольника (рис. 5), так что ничего удивительного в поведении козы нет, она может «построить» и более интересные фигуры.

Задача 1. Попробуй ограничить козу параллелограммом.

Задача 2. Ограничь козу

а) треугольником;

б) правильным шестиугольником;

в) заданным выпуклым многоугольником.

Я. – Решив эти задачи, я смогу заставить козу «съесть» и сектор.

Математик. – Конечно, ведь сектор – это пересечение треугольника с кругом, а обе эти фигуры ты сможешь получить. Кстати, вот тебе ещё задача.

Задача 3. Как заставить козу съесть полукруг?

Я. – Я подумаю над твоими задачами. Интересно, ты сам полностью придумал «теорию голодной козы» или воспользовался какими-нибудь математическими понятиями?

Математик. – Я уже говорил о таких вещах, как расстояние от точки до отрезка, пересечение фигур. Но, по-моему, самое нужное математическое понятие, которое использовалось, – это понятие «окрестности фигуры радиуса R».

Определение. *Окрестностью радиуса R фигуры Φ* называется множество всех тех точек, расстояние от которых до фигуры Φ не превосходит R (здесь R – неотрицательное число).

Я. – А что такое «расстояние от точки до фигуры»?

Математик. – Это естественное обобщение понятия «расстояние от точки до отрезка».

Определение. *Расстоянием от точки M до фигуры Φ* называется наименьшее из расстояний от точки M до точек фигуры Φ.

Я. – Значит, окрестность радиуса R точки – это круг радиуса R, окрестность радиуса R отрезка AB – та самая фигура, с которой ты начал разговор (рис. 2). А что такое окрестность радиуса 0?

Математик. – Сама фигура Φ. Вообще, если $R_1 < R_2$, то окрестность радиуса R_1 фигуры является частью окрестности радиуса R_2 этой же фигуры.

Я. – А прямоугольник является пересечением окрестностей отрезков (рис. 4). Интересно...

Математик. – Заметим, что окрестность радиуса R фигуры Φ состоит из тех и только тех точек плоскости, что лежат в окрестности радиуса R хотя бы одной из точек Φ, то есть лежат в одном из кругов радиуса R с центрами в точках Φ. Кстати, вот тебе ещё задачи.

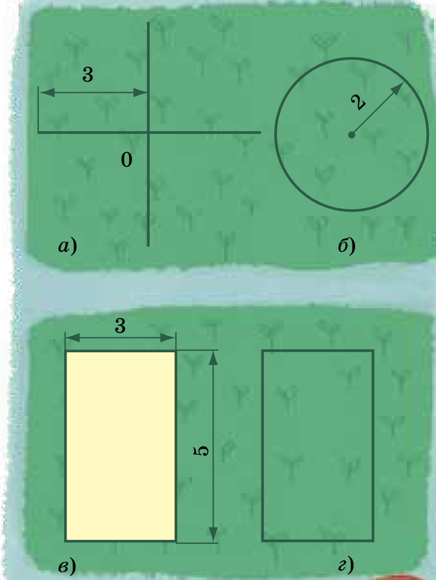


Рис. 6

Задача 4. Что является окрестностями радиуса 1 следующих фигур (см. рис. 6):

а) креста;
б) окружности;
в) прямоугольника;
г) границы этого прямоугольника?

Задача 5. Какова площадь окрестности радиуса R выпуклого многоугольника с периметром P и площадью S? (Подсказка: площадь круга радиуса R равна πR^2.)

Я. – Мы забыли про козу.

Математик. – Нет, почему же? Если у нас есть проволока, можно петлю верёвки длины R надевать на неё. Тогда коза съест окрестность радиуса R проволочного контура. Мы считаем, конечно, что контур приварен к единственному колышку, так что он неподвижен и петля свободно скользит по нему.

Я. – Значит, с помощью проволоки можно заставить козу съесть окрестности радиуса R окружности и границы прямоугольника?

Математик. – Да. Вот с окрестностью креста дело обстоит сложнее.

Задача 6. Подумай, какой нужен проволочный контур, чтобы получить окрестность креста.

Я. – Действительно, сам крест в качестве контура не подойдёт – ведь через точку O (рис. 6, а) петля не пройдёт. Надо подумать... Интересно, можно ли в «теории голодной козы» использовать окрестность самого прямоугольника, а не его границы?

Математик. – Построим низкую загородку по границе прямоугольника так, что коза легко

перепрыгивает через неё. Один конец верёвки длины R привяжем к ошейнику, а другой – к рогульке-«якорю», который может двигаться только внутри прямоугольника. Перетащить его через загородку коза не может. Тогда коза будет питаться в окрестности радиуса R прямоугольника.

Ты, может быть, знаешь, что разностью $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ двух фигур Φ_1 и Φ_2 называют фигуру, состоящую из всех тех точек Φ_1, которые не лежат в Φ_2. Например, разностью прямоугольника со сторонами 30 м и 40 м и окрестностью его границы радиуса 5 м будет прямоугольник со сторонами 20 м и 30 м (рис. 7).

Я. – В «теории голодной козы» это можно использовать так. К прямоугольному проволочному контуру 30 м $\times$ 40 м пятиметровой цепью привяжем собаку. Она будет бегать по окрестности радиуса 5 м границы этого прямоугольника и не пускать козу за пределы прямоугольника 20 м $\times$ 30 м.

Математик. – Вот похожая задача.

Задача 7. Как одной собакой удержать непривязанную козу в полукруге?

Рис. 7

«Теорию голодной козы» можно развивать в разных направлениях. Например, можно пользоваться только колышками и верёвками и требовать, чтобы все верёвки были постоянно натянуты. Тогда заставить козу ограничиться прямоугольником $ABCD$ можно так: вбить колышки в вершинах прямоугольника, натянуть верёвки между A и B и между C и D, набросить верёвочное кольцо на верёвки AB и CD, натянуть его до отказа и привязать козу к кольцу. Ведь для точек прямоугольника сумма расстояний до двух противоположных сторон постоянна. Теперь ты сможешь заставить козу «съесть» треугольник и при новых ограничениях…

Следующий лист был выдран, и мы не узнали о дальнейшем развитии «теории голодной козы». Может быть, читатели «Квантика» помогут нам и предложат свои варианты теории?

Художник Ануш Микаелян