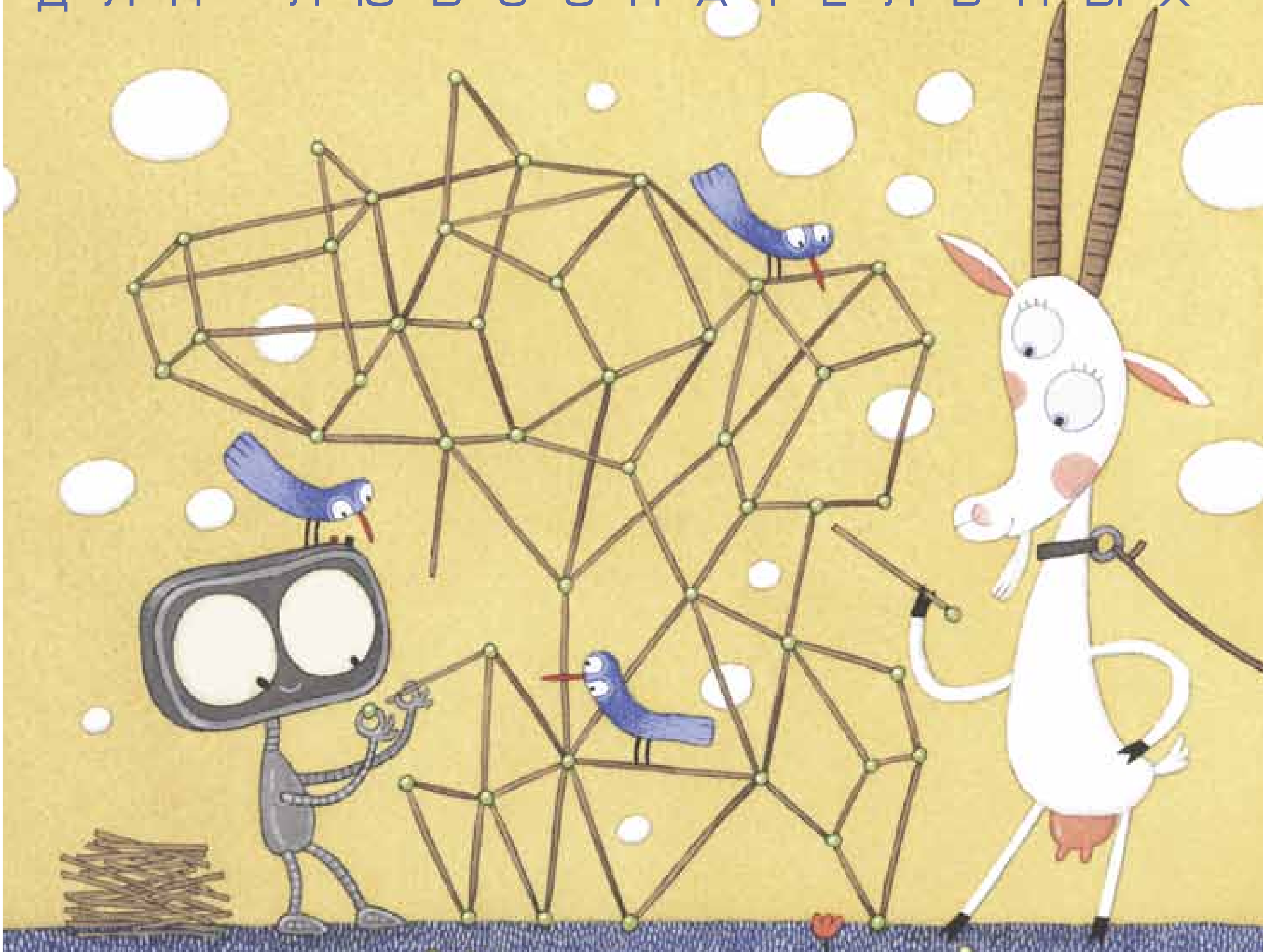
ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



№10 ГОРОХОВЫЙ КОНСТРУКТОР

октябрь 2014

КОЗА НА ПРИВЯЗИ

СОСУДЫ С СЕКРЕТОМ

Enter

№ 10 | октябрь 2014

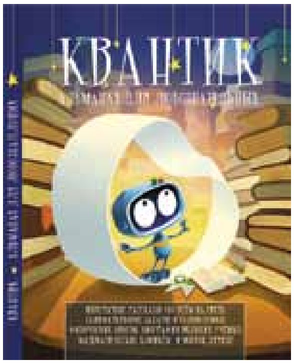
Издаётся при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

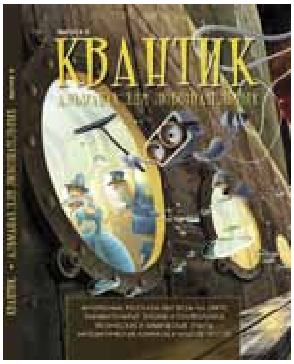
e-mail: kvantik@mccme.ru

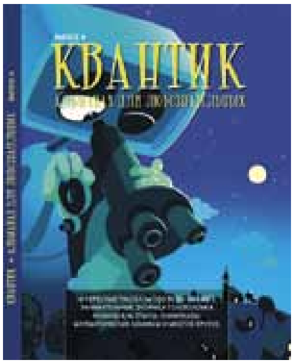
ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Вы можете оформить подписку на «Квантик» в любом отделении Почты России. Подписаться на следующий месяц можно до 10 числа текущего месяца. Наш подписной индекс **84252** по каталогу Роспечати.

Почтовый адрес: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., д.11, журнал «Квантик». Подписной индекс: 84252







Первые четыре выпуска
АЛЬМАНАХА «КВАНТИК»
с материалами номеров 2012
и 2013 года,
а также все остальные вышедшие номера можно купить в магазине «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА»
по адресу: г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11,
http://biblio.mccme.ru
или заказать
по электронной почте:
biblio@mccme.ru

ISSN 2227-7986 10
9 772227 798145

www.kvantik.com
@ kvantik@mccme.ru
kvantik12.livejournal.com
vk.com/kvantik12

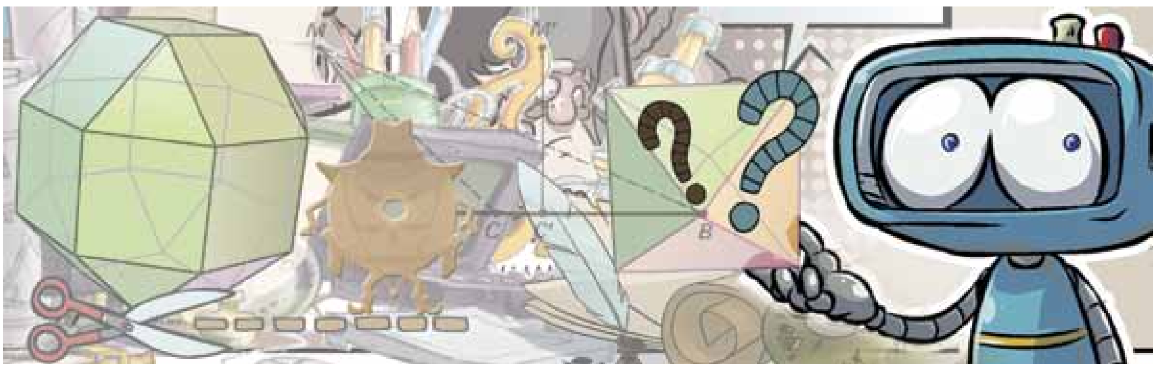
Электронная версия журнала: http://pressa.ru/magazines/kvantik#/
Приглашаем на онлайн-кружок «Квантика»: kvantik.com/online

Главный редактор: Сергей Дориченко
Зам. главного редактора: Ирина Маховая
Редакция: Екатерина Антоненко, Александр Бердников, Алексей Воропаев, Дарья Кожемякина, Андрей Меньщиков, Максим Прасолов, Григорий Фельдман
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Верстка: Ира Гумерова, Рая Шагеева
Обложка: художник Елена Цветаева
Формат 84x108/16. Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
ISSN 2227-7986
Тираж: 3000 экз.
Адрес редакции: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499)241-74-83.
e-mail: kvantik@mccme.ru

По вопросам распространения обращаться по телефону: (499) 241-72-85;
e-mail: biblio@mccme.ru
Подписаться можно в отделениях связи Почты России,
подписной индекс **84252**.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ



Вера Башмакова,
Александр Доброчаев

ИЗ ЖИЗНИ МАЯТНИКОВ

Одним снежным субботним утром Машин папа слепил из пластилина небольшой шарик. К шарику он приделал нитку. Другой конец нитки привязал к турнику. Взял секундомер, качнул шарик и засёк время, за которое он качнётся десять раз. Двадцать секунд и две десятых. Он записал это на бумажке.

Потом он качнул шарик ещё раз и снова засёк время десяти качаний. Тоже двадцать секунд и две десятых. Он снова записал.

– Ну вот, – сказал папа довольным голосом. – Есть какие-нибудь идеи?

– Он качается одинаково, – отозвалась Маша беззаботно.

– У шарика одинаковый период колебаний, – волнуясь ответил Вася. Он Машиного папу очень уважал. И стеснялся.

– Во-от, – ответил папа. – Период колебаний. Что это такое?

– Это... ну... время, за которое шарик качнётся туда-сюда, – лихорадочно сформулировал Вася.

– Пра-виль-но! А он всегда будет одинаковый у этого шарика?

– Наверно! – опять беззаботно заявила Маша.

– Проверить надо, – застенчиво произнёс Вася. Машин папа взглянул на него, ожидая продолжения, и Вася добавил: – Надо несколько раз вот так делать – качать шарик и время засекать.

– Золотые слова, – сказал Машин папа с уважением. Вася скромно покраснел. – Ладно! Вы тут качайте этот... математический маятник, – Вася открыл было рот, чтобы задать вопрос, но тут же и закрыл; он решил разобраться сам, – а я пойду. У меня встреча через час, и, – добавил он, натягивая пальто, – когда я вернусь, вы наверняка сделаете какое-нибудь *открытие*.

Двадцать минут спустя Вася, обхватив руками голову, глядел на бумажку с числами, а Маша, беспечно свесив ноги с подоконника, жевала яблоко и играла в планшет. За окном сыпал снег.

– Ла-адно, – сжалилась она наконец, – давай рассказывай, что у тебя там такое.

– Цифры не сходятся, – мрачно буркнул Вася. – Только они не сходятся как-то... подозрительно.

Маша заглянула Васе через плечо. На бумажке было нацарапано:

20,2	20,4	20,0	19,7	20,5	19,8	20,7	19,8	19,8	20,3

– Ну-у, – протянула Маша. – Тоже мне, проблемочка. Это же почти одинаковые цифры. Ну отличаются на чуть-чуть. Раз похоже – значит, одно и то же.

– Но они же, – в отчаянии возопил Вася, – отличаются!

– Вась, – сказала Маша взрослым тоном. – Они отличаются просто потому, что ты, дитя моё, – «дитя моё» Маша постаралась произнести басом, – тормозил, когда на кнопку секундомера нажимал. Или, наоборот, торопился.

И Маша деловито уселась на подоконник, закинув ногу за ногу.

– Маш, – возмутился Вася. – Да так можно про любую разницу сказать. Если б тут было у меня пятьдесят секунд, ты бы тоже сказала, что это я тормозил, когда на кнопку жал?

– Не-е, – ответила Маша. – Пятьдесят секунд – это даже для тебя слишком. О! А давай проверим!

И Маша протянула Васе секундомер.

– Замеряй десять секунд.

И Вася стал замерять.

9,9	9,9	10,0	9,8	10,2	9,3

Васино лицо просветлело.

– Одна секунда туда-сюда просто не считается, – сказал он с облегчением. – Потому что я на секунду могу ошибиться, когда на кнопку жму. Измерение просто не может быть совсем-совсем точным. Ну всё! Значит, шарик всегда качается одинаково.

– Ну уж нет! – неожиданно возмутилась Маша. – Если ты одинаково качаешь одинаковый шарик, то, конечно, он будет качаться ОДИНАКОВО. Давай попробуем что-нибудь изменить и тогда уже посмотрим.

– Ну а что?

– Ну а давай его будем качать сильно и слабо.

– Давай!

В этот раз Маша запускала секундомер, а Вася отводил шарик и говорил Маше, когда он качнётся десять раз. Дело шло быстрее и интереснее, и совсем скоро у ребят была нарисована табличка:

Расстояние, на которое отвели шарик, см	10	30	24	58	17	22	45	70	15
Время десяти качаний, с	20,3	20,2	20,2	20,6	20,3	20,2	20,7	20,5	20,2

– Так, – сказал Вася с облегчением, – шарик по-любому будет качаться с одним и тем же периодом. Убедилась? Всё.

– Что всё? Изменить, что ли, больше ничего нельзя?

– А что ты тут изменишь? Ну? Вот что?

Маша замялась, и Вася уже собирался торжественно убирать секундомер и отвязывать шарик, когда она ответила:

– Я сделаю большой шарик.

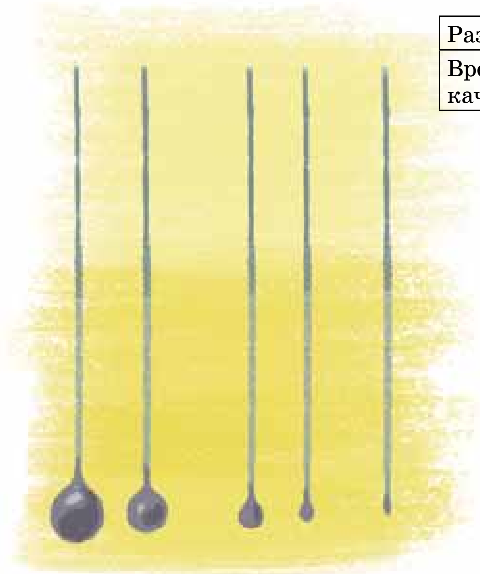
Вася секунду помолчал.

– Ну, – хмыкнул он наконец. – Пробуй. Получится то же самое.

Маша достала пластилин из коробки, под Васиным скептическим взглядом скатала из него огромный ком, прилепила к шарику, оттянула его подальше и вложила в Васину руку.

– Запускай! – сказал Вася, и Маша запустила секундомер.

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ



Чем больше они измеряли, тем шире улыбался Вася и тем сильнее вытягивалась от огорчения Машина физиономия. Табличка выглядела так:

Размер шарика	Огромный	Большой	Средний	Маленький	Крохотный
Время десяти качаний, с	20,2	20,2	20,9	20,1	Вообще не качается

Маша, не глядя Васе в глаза, мрачно обводила карандашом надпись «Вообще не качается».

– Маш, – сочувственно сказал Вася. – Он не качается не потому, что у него период колебаний другой, а потому, что такой маленький шарик – это уже не шарик вообще, а просто нитка, испачканная в пластилине. А нитка не качается, потому что легкая она.

– Ну и ладно, – ответила Маша и надулась.

Теперь Маша угрюмо сидела, глядя в бумажку, а Вася, свесив ноги с подоконника, жевал яблоко, играл в планшет и изредка взглядывал на Машу. Он огорчался, что она грустит, но радовался, что выиграл в споре. За окном так и сыпал снег.

И вдруг Маша прямо подпрыгнула.

– Ва-ась! – воскликнула она. – Нитка!

– Что?

– Нитка! У маятника может меняться не только шарик, но и нитка! Давай попробуем!

И Маша отвязала нитку от турника, привязала заново (так, что маятник стал покороче) и всунула шарик Васе в руку, а сама схватила секундомер.

– Засекай! – сказал Вася.

Маша засекла, Вася качнул шарик, и…

…– А вот нет, – убеждённо сказала Маша. – Я тебе точно говорю. Держи вот секундомер, увидишь.

– Я всё-таки как-то не могу поверить, – ответил Вася неуверенно.

– Поверишь, – сказала Маша. – Попробуем ещё раз. Засекай.

А табличка выглядела так:

Длина нити, см	100	45	15
Время десяти качаний, с	20,2	13,5	7,8

– Может, мы мерили неаккуратно? – спросил Вася.

– Дорогой мой мальчик, – сказала Маша нежно. – Разница в полсекунды, ну, секунду – это, конечно, случайность. Но у нас тут разброс больше десяти секунд. Это не могло получиться просто так, это что-то значит! Это ВАЖНО, понимаешь, Вась? Период колебаний ЗАВИСИТ от длины нити маятника.

– Дорогая моя девочка, – отозвался Вася ещё нежнее. – Допустим, ты права. Но тогда у нас осталась ещё одна кро-о-охотная проблемка. Мы не знаем, КАК период колебаний зависит от длины нити. А без этого ничто не имеет смысла.

И он взял яблоко и закинул ноги на спинку дивана. Маша посмотрела в табличку.

– А чего тут непонятного? – спросила она. – Чем длиннее нить, тем больше период. Что тебе ещё нужно?

– Больше-то больше, но как бы точнее эту закономерность узнать? Тут наверняка какой-то секрет, которого мы не знаем.

– Так давай наберём себе ещё точек. Держи секундомер.

И ещё полчаса они качали шарик, засекали время, наносили точку на график, меняли длину нитки и снова качали, засекали, записывали...

– Секрет-то есть, да как его разгадать? – сказал Вася. – Слушай, а давай график построим!

И тут Маша скисла. Она, конечно, любила строить графики. Но у Васи они получались лучше и аккуратнее, чем у неё. И поэтому она любила строить графики, когда этого не видел Вася.

– Ну дава-ай, – вяло протянула она.

Вася схватил два листочка в клеточку, один кинул Маше, а на другом быстро нарисовал оси, нанёс на них деления и стал отмечать получившиеся точки. Маша делала то же, но куда медленнее – она понимала, что за Васей ей не угнаться.

А Вася, отметив точки, сел, обхватил руками голову и крепко задумался. Он сидел так всё то время, что Маша расчерчивала оси и ставила точки, и когда она всё сделала, он тоже не сдвинулся с места. Тогда, взглядывая изредка на Васю, Маша начала проводить кривую линию, захватывающую все отмеченные точки. Вася некоторое время сидел безучастно, а потом скосил глаза в Машин листок, крикнул «Чепуха!», скомкал его и бросил в угол.

И тут Маша обиделась. Не то чтобы она сама такого никогда не отчебучивала. Но она по крайней мере объясняла, с какого перепугу всё это устроила. Или по крайней мере ей казалось, что объясняла. Оскорбленно схватив из вазы последнее яблоко, она пошла к двери, чтобы открыть её и навсегда выгнать в неё Васю.

– Ма-а-аш, – протянул Вася примиряюще. – Ну прости, ну я не хотел тебя обидеть. Просто ты сделала глупость. Когда я делаю глупости, ты ведь так же себя ведёшь.

– Мог бы и объяснить, в чём дело, – процедила Маша, глядя в сторону. – Безо всех вот этих «Чепуха-а!».

– Ну просто, Машка, – начал Вася деловито, – ты берёшь да и тупо проводишь линию графика через все отмеченные точки, как будто ты не человек с мозгами, а машина без мозгов. С чего ты взяла, что тут будут такие вот холмы и долины? – С этим словами Вася достал из угла скомканный листочек расправил его и провёл пальцем по кривой-прекривой линии, которую провела через все точки Маша.

– Что же в этом неправильного? – ядовито поинтересовалась Маша.

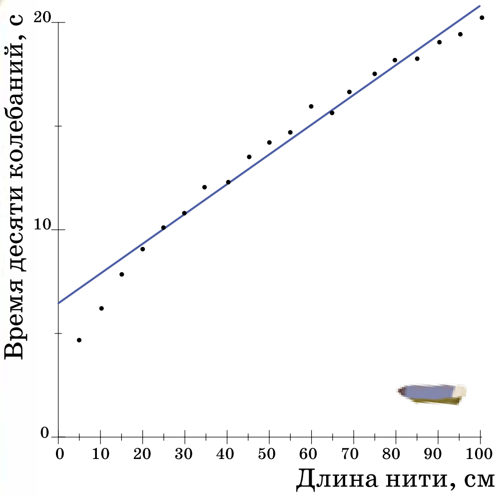
– А то! – запальчиво ответил Вася. – Мы же с тобой уже вроде поняли, что точки эти – неточные! Сама же ты вроде мне это доказала! Каждая точка может болтаться туда-сюда по временной оси, на секунду как минимум. И к тому же – ну,

честно! – длину нити мы тоже совсем точно измерить не можем, потому что нам сам маятник мешает, линейка в него утыкается. Значит, точки ходят туда-сюда по обеим осям. Это тебе не урок математики, где все точки ложатся в красивый ряд. Это физика, детка!

Маша вгляделась в свой измятый график.

– Мм… Ты имеешь в виду… То есть вот эта точка у нас просто куда-то уплыла, потому что у нас руки кривые, а вот эта вот… Хм. То есть ты хочешь сказать, что график не обязательно проходит сквозь все-все нанесённые точки… Тогда я, кажется, знаю!

Она схватила линейку и провела прямую линию через несколько подходящих точек. С двух сторон от этой линии стояли точки, которые в неё не вписались.

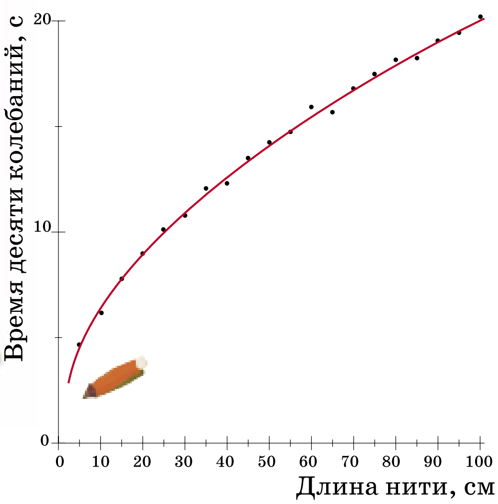


– Вот и всё! – подытожила Маша удовлетворенно. – Ровненькая, красивенькая лини…

– Чепуха! – крикнул Вася, вырвал листок у Маши из рук и снова зашвырнул его в угол. Маша возмущённо схватила надкушенное яблоко и снова кинулась к двери – выгонять.

– Ма-а-аш, – снова протянул примиряюще Вася после короткой паузы. – Ты не обижайся. Просто ты опять невнимательная. Посмотри, как у тебя точки от графика отклоняются.

– Ну и что? Это ошибки просто, и всё. Мы же договаривались, вроде, что точки плавают туда-сюда. Они плыли, плыли… И уплыли.



– Ага! По краям все вниз уплыли, слева вон вообще провалились, а посередине – вверх уехали. Нет, Маш. Тут дело нечисто. Наш график – это не прямая, это кривая, зуб тебе даю. Вот я и думаю, как её провести.

Оба замолчали, только Маша хрустела яблоком.

– Ладно, – сказала наконец Маша мирным голосом. – Ты прав, график гнётся. Давай тогда так попробуем, – и Маша аккуратно нарисовала плавную кривую.

– Похоже на параболу, только оси поменяны местами, – задумчиво ответил Вася.

– Чего? – не поняла Маша.

– Ну Машка, парабола, график такой! Ты что, забыла, мы ж его с твоим папой когда-то строили. По оси иксов число отмечаем, а по оси игреков – квадрат числа. А у нас, похоже, наоборот – на оси игреков число, а на оси иксов – его квадрат.

– Так давай проверим, – сказала Маша. – Чего у нас там, в табличке, сначала было? – Маша схватила калькулятор, и через минуту протянула Васе листок:

Длина нити, см	100	45	15
Время десяти качаний, с	20,2	13,5	7,8
Квадрат времени	408,04	182,25	60,84

– Можешь дальше не продолжать, – разочарованно буркнул Вася, – всё равно не получается. Квадраты гораздо больше, раза в 4.

Маша несколько минут напряжённо изучала листок.

– Ва-а-ась, – вдруг закричала Маша, – да ты же гений! Выдвигаю гипотезу – квадрат времени в 4 раза больше длины нити! Вот он, секрет! Ну, не ровно в 4 раза, но практически точно. Да это и понятно – мы же с ошибками мерили.

Вася смотрел то на Машу, то на листок, и вдруг завопил:

– Ура-а! Вот это гипотеза так гипотеза, уважаю. По ней можно и график точно построить, хоть на компьютере. Только как мы его проверим?

– Как-как. График правильный, если он умеет предсказывать. Ты берёшь на этом графике точку и говоришь – у маятника вот с такой длиной нити будет вот такой период колебаний. И вот проверяешь и – бац! – он именно такой. Вот это и называется предсказание.

Вася взглянул на график. Он был весь усыпан точками – на нём буквально не было живого места. Только далеко-далеко на этом графике, там, где нить маятника должна была быть уже очень длинной, было свободное от точек место. Маша с Васей переглянулись и оба ткнули карандашом в далёкую точку с длиной нити два метра.

* * *

Когда Машин папа вернулся домой, детей там не было. На турнике висел пластилиновый шарик на длиннющей двухметровой нити. А на противоположной турнику стене был приклеен график – очень аккуратный график. Одна точка на этом графике – там, где длина нити должна была составлять два метра, – была отмечена красным. Возле этой точки с одной стороны стоял знак вопроса, а с другой – восклицательный знак. Точка лежала на графике почти идеально.

А под графиком была записка: «Вот ответ, а мы на горке».

Машин папа почесал в затылке, улыбнулся и пошёл пить чай.

Художник Ольга Демидова

Александр Бердников

КАСАТЕЛЬНЫЕ И РАДИУСЫ

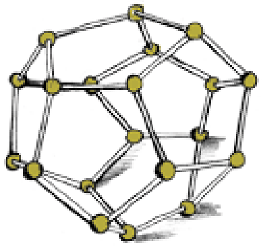
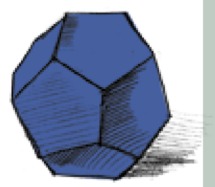
Ветер крутил игрушечную вертушку под ледяным дождём. На ней образовались сосульки, идущие по радиусам. Но известно, что капли слетают с крутящегося колеса по касательным.

Почему же тогда сосульки вырастают по радиусам?

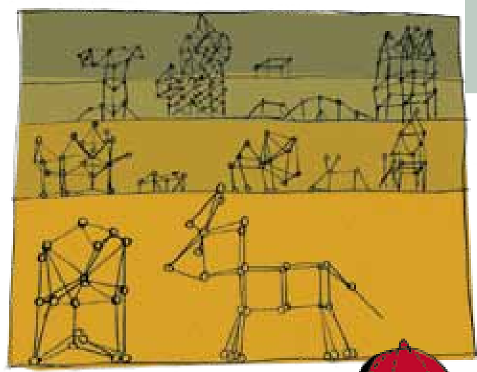
Художник Евгений Паненко

По материалам кружка Жени Кац, подготовил Григорий Фельдман

ГОРОХОВЫЙ КОНСТРУКТОР

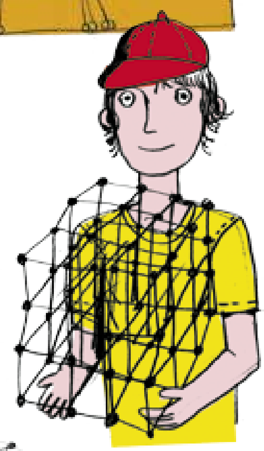
Один из самых увлекательных конструкторов очень прост. Он состоит из замоченного гороха нут* и зубочисток. Играть в этот конструктор легко: втыкая зубочистки в нут, можно получить множество удивительных поделок! Конструкции обычно держатся несколько часов.



Инструкция.

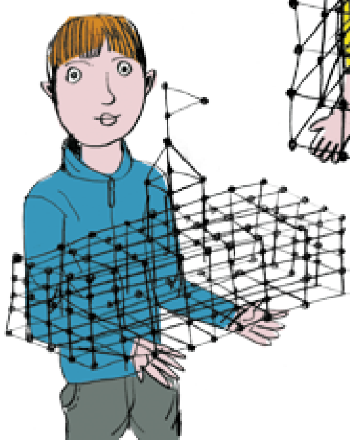
Замочите горох нут в холодной воде на 6 – 7 часов (на 500-граммовую упаковку нужно около 1 литра воды). Этого количества хватит на 4 – 6 человек. Запаситесь зубочистками (если увлечься, их может уйти целая тысяча, а то и две-три).

Самое интересное – это самому придумывать разные конструкции. Посмотрите, какие шедевры рождаются: и необычные многогранники, и целые замки, и даже кошки и жуки!



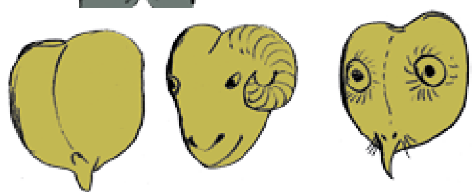
Однако с гороховым конструктором можно не только развлекаться, но и изучать интересные математические сюжеты.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

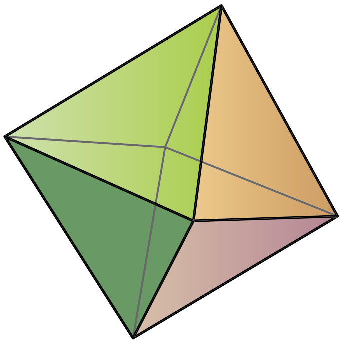


Первым делом можно пособирать правильные многоугольники (у них равны все стороны и все углы), например, правильный треугольник, квадрат...

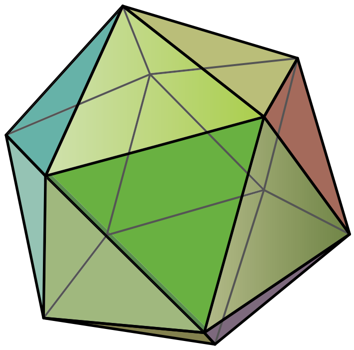
Но сразу хочется перейти от плоских фигур к пространственным – например, собрать привычные куб и треугольную пирамиду. У каждой из этих фигурок все грани – одинаковые правильные многоугольники и во всех вершинах сходится поровну граней. Выпуклые многогранники с такими двумя замечательными свойствами называются правильными.



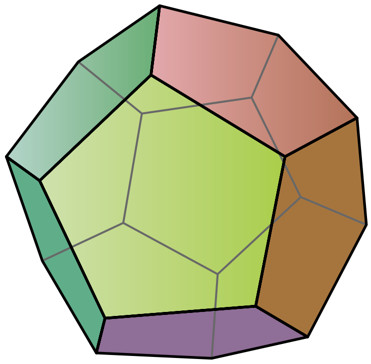
*Нут – бобовое растение, популярное на Ближнем Востоке. Бобы по форме напоминают совиную или баранью голову, при замачивании не разваливаются на две половинки.



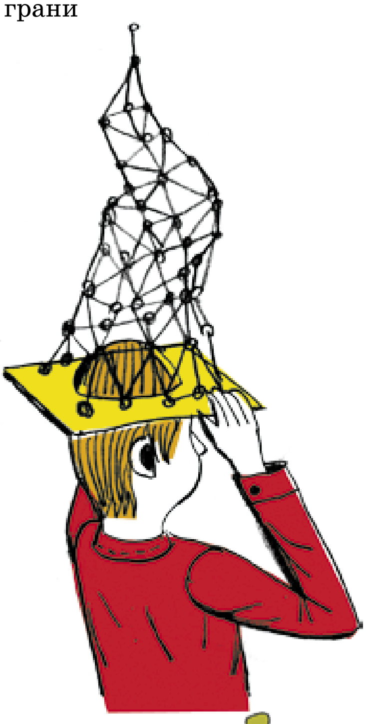
Октаэдр
Грани: 8 треугольников.
В каждой вершине сходится 4 грани



Икосаэдр
Грани: 20 треугольников.
В каждой вершине сходится 5 граней



Додекаэдр
Грани: 12 пятиугольников.
В каждой вершине сходится 3 грани



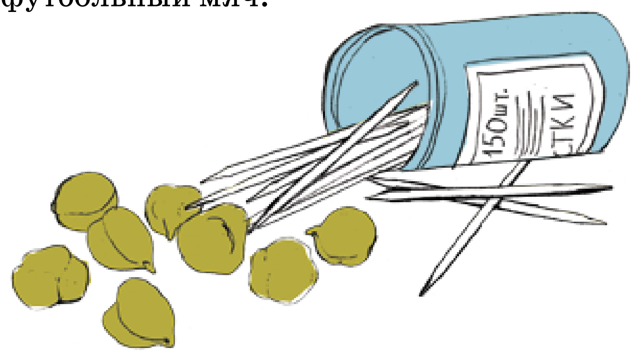
Кроме куба и правильного тетраэдра (правильной треугольной пирамиды), есть ещё три правильных многогранника.

Сделайте их – и увидите, какие они красивые! Не зря Иоганн Кеплер представлял себе Вселенную как вложенные друг в друга правильные многогранники.

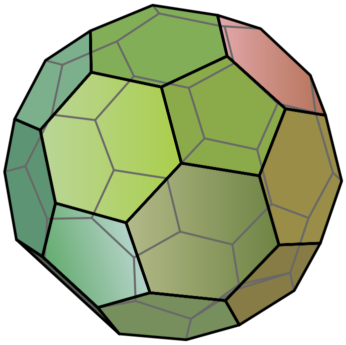
От додекаэдра есть и практическая польза. Поскольку у него 12 граней, а в году 12 месяцев, то можно сделать оригинальный календарь в форме додекаэдра (см. «Квантик» № 12 за 2012 г.)

ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

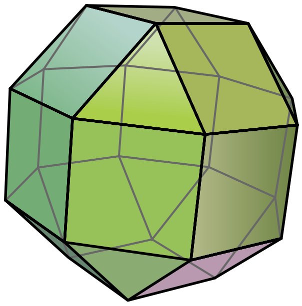
Ещё интересно собирать многогранники, в которых все грани по-прежнему правильные многоугольники, но есть не один, а несколько типов граней. Яркий пример – усечённый икосаэдр, который похож на обычный футбольный мяч.



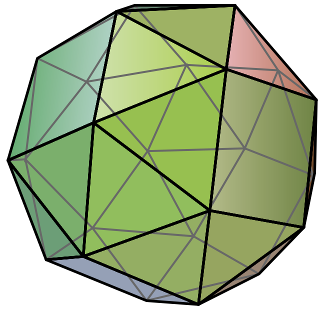
СВОИМИ РУКАМИ



Усечённый икосаэдр
Грани: 12 пятиугольников и 20 шестиугольников.
В каждой вершине сходятся 2 шестиугольника и пятиугольник



Ромбокубооктаэдр
Грани: 8 треугольников и 18 квадратов.
В каждой вершине сходятся три квадрата и треугольник



Курносый куб
Грани: 32 треугольника и 6 квадратов.
В каждой вершине сходятся четыре треугольника и квадрат

Курносый куб интересен вот чем. В отличие от всех перечисленных выше многогранников у него нет плоскости симметрии. Это означает, что если вы соберёте зеркальное отражение курносого куба, получится другой многогранник – разница примерно такая, как между левым и правым ботинками.

ЗАДАЧИ

1. Сделайте многогранник, все грани которого – треугольники и шестиугольники.
2. Сделайте додекаэдр и найдите в нём 8 вершин, образующих куб.
3. Придумайте многогранник, в котором нет трёх граней с одинаковым числом рёбер. Соберите его (возможно, вам понадобятся зубочистки разной длины – их можно ломать).

Художник Артём Костюкевич

Борис Дружинин

Дайте Пушкину сдачи

26 марта

Занятие кончилось, все дети ушли, и только Саша задержался.

– Дядя Боря, вы в прошлый раз нам неправильную задачу прочитали.

– Какую задачу? Мы в прошлый раз никаких особенных задач не решали. Напомни.

– Не решали. Но вы нам шутку из книжки прочитали, помните? Там мальчик не мог сам домашнее задание сделать, и в магазине у продавца спросил про сдачу.

Действительно, на прошлом занятии я прочитал шутку из прекрасной книги А. А. Волиной «Весёлая математика». Шутка примерно такая:

В магазине мальчик спрашивает у продавца:

– Если я куплю ластик за четыре рубля и карандаш за три рубля и дам вам девять рублей, то сколько вы мне сдачи дадите?

– Два рубля. Давай скорее, а то народу много.

– Да я ничего покупать не собирался, я задачу не мог решить.

– Так чего тебе в этой шутке не нравится?

– Нельзя с девяти рублей два рубля сдачи получить.

Немного сбиваясь, Саша объясняет свои сомнения, пишет на доске разные варианты. Скоро выясняется, что сдачу с девяти рублей можно дать только единственным способом. Договариваемся с Сашей к следующему занятию попытаться сделать из этого задачу.

2 апреля

И вот Саша предлагает всем решить составленную им задачу.

– Пушкин купил томик своих стихов, выпущенный к двухсотлетию со дня его рождения. Пушкин дал продавцу девять рублей и получил сдачу... Чего смеётесь? **Сдачу он получил – рубли. Копеек никаких не было, только рубли,** понятно? **Теперь вопрос: сколько рублей стоит этот томик стихов?**

– А монеты какие – царские?

– Да наши монеты, современные – дело же сейчас происходит.

– А сколько рублей он на сдачу получил? – задаёт встречный вопрос Костя. – Если три рубля, то томик шесть рублей стоит. Чего тут сложного?

– А если в задаче надо узнать, сколько Пушкин получил сдачи, – не сдаётся Саша, – то ты спросишь, сколько книжка стоила? Да?

– Конечно! – поддерживает Костю Александра. – От девяти отнимем стоимость книги и получим сдачу.

– Сумма стоимости книги и сдачи – девять рублей, – вступает в разговор Оля. – Вот и весь ответ, ничего интересного.

– Дядя Боря, можно я им объясню? – не выдерживает Саша.

– Не торопись, может, задачу твою не так поняли. Кто-нибудь может повторить условие? Попробуй, Дима.

– Пушкин купил книгу. Он дал продавцу девять рублей и получил сдачу. – Дима задумывается и продолжает: – Раз он получил сдачу, значит, книга стоит от одного до восьми рублей. Правильно?

– Нет, неправильно, – не выдерживает Саша. – То есть я согласен, что раз сдачу Пушкин получил, то книга меньше девяти рублей стоит. Но за книгу в четыре рубля он не станет давать продавцу девять. Зачем ему давать и потом обратно получать одни и те же монеты?

– Правильно! – поддерживает Сашу Катя. – За книгу в четыре рубля Пушкин может только один рубль сдачи получить, если даст продавцу пять рублей.

– Или шесть рублей, если десятку даст, – добавляет Саша.

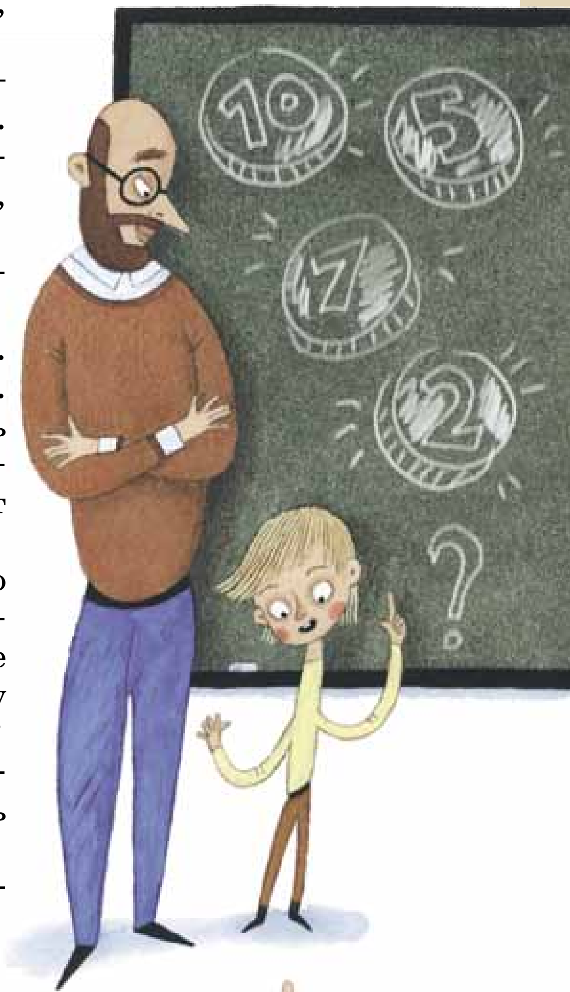
– Или сорок шесть, – продолжает Лена.

– Или девяносто шесть, если сотню даст, – говорит Валя и всё-таки спрашивает: – А почему он не может семь рублей дать и получить три рубля сдачи?

– Потому что семь рублей одной бумажкой или монетой не бывает! – Саша начинает горячиться. Приходится вмешиваться учителю.

– Давайте выясним все варианты, которыми Пушкин мог дать продавцу девять рублей. А потом посмотрим, какую сдачу он мог получить в каждом из этих вариантов. Есть желающие?

– Это долго и скучно, – капризничает Валя.



– Не надо перебирать все варианты, – сообразила Катя. – Пушкин не мог дать ни одной рублёвой монеты – он бы её у себя оставил, и на томик стихов всё равно хватило бы.

– Точно! – порадовался Валя. – Значит, он дал 9 рублей только двойками и пятёрками. А такой вариант только один: $9 = 2 + 2 + 5$.

– Я запуталась, – сказала Лена. – Сколько же стоит томик?

– Если бы томик стоил 7 рублей или меньше, – продолжает Валя, – Пушкин бы дал $2 + 5 = 7$ рублей или меньше, а не 9.

– Тогда получается, что книга стоит восемь рублей, – подводит итог Дима. – Дядя Боря, а ещё есть задачи про Пушкина?

9 апреля

– Попробуйте разобраться в такой ситуации. Вы помните, что Пушкин учился в лицее, в Царском Селе. Гулял он там как-то по саду и встретил императора российского Александра Первого. Поздоровались они и присели на скамеечку. Сидят и **смотрят в противоположные стороны.**

– Что это у тебя, брат Александр Сергеевич, кровь на щеке? – спрашивает Александр Первый у Пушкина. – Порезался, когда брился?

– Нет, ваше величество, это я клубнику ел, – отвечает Пушкин и в свою очередь вопрос задаёт: – А что это у вас, ваше величество, шишка на лбу и синяк под глазом?

– Кто-то у меня клубнику с грядки ел. Погнался я за этим разбойником, наступил на грабли... – вздохнул император. – Вот теперь и синяк, и шишка.

Вопрос: как они могли рассмотреть друг друга, если смотрели в противоположные стороны?

– Очень просто, – не задумываясь, говорит Саша. – У нас на машине есть зеркала. В них видно, что сзади происходит.

– Так император только затылок Пушкина рассмотреть может, – возражает ему Лена.

– Тогда надо каждому Александру дать по зеркалу, – поддерживает Сашу Дима. – Каждый видит в своём зеркале зеркало другого Александра, а там его лицо.

– А может, там, в саду, большие зеркала стояли, – делает предположение Оля. – Всё-таки Царское Село, придворные дамы гуляли. А может, даже царица…

– А без зеркал никак нельзя обойтись? – пытаюсь направить мысли ребят в другом направлении.

– Но они же в разные стороны смотрят! – удивляется Оля.

– Не просто в разные, а в противоположные, – поправляю Олю.

– А какая разница?

– Большая! – убеждённо говорит Саша. – Мы с тобой в соседние окошки будем смотреть, и это уже в разные стороны. А в противоположные – это когда, скажем, один смотрит прямо на север, другой – на юг. Как же они друг друга увидят?

– Думаю, раньше всех догадаются Валя с Тамарой.

Все смотрят на подруг, а те – друг на друга.

– А ведь и правда, – радостно объявляет Оля, – они же в противоположные стороны смотрят. Валя на Тамару, а Тамара на Валю.

– Что же получается, – удивляется Дима, – когда два поезда сталкиваются, оказывается, они в противоположных направлениях мчались? Вот никогда не думал.

16 апреля

– Александр Сергеевич Пушкин, ученик Царскосельского лицея, и Александр Первый, император российский, гуляли по лесу. Гуляли, красотой любовались, но тут проливной дождь внезапно пошёл. Побежали они домой. Один Александр в лицей, другой – во дворец. Бегут, а тут поперёк пути река оказалась, на другой берег переправляться надо. Замечают они около берега маленькую лодочку, только один человек поместиться в ней может. И всё-таки они легко переправились через реку в этой лодочке. Как им это удалось?

Предполагалось, что разбор этой ситуации продлится как раз до конца занятия, но уже через пару минут мы с энтузиазмом играли в «Мемори». Дети легко справились с этой задачкой, поэтому решения её приводить не буду, подскажу только, что они воспользовались решением предыдущей задачи про двух Александров.

Художник Елена Цветаева

Четыре задачи

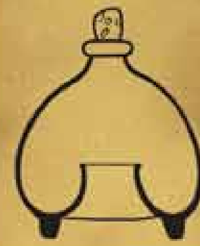
Сосуды с секретом

Материал подготовил
Григорий Фельдман

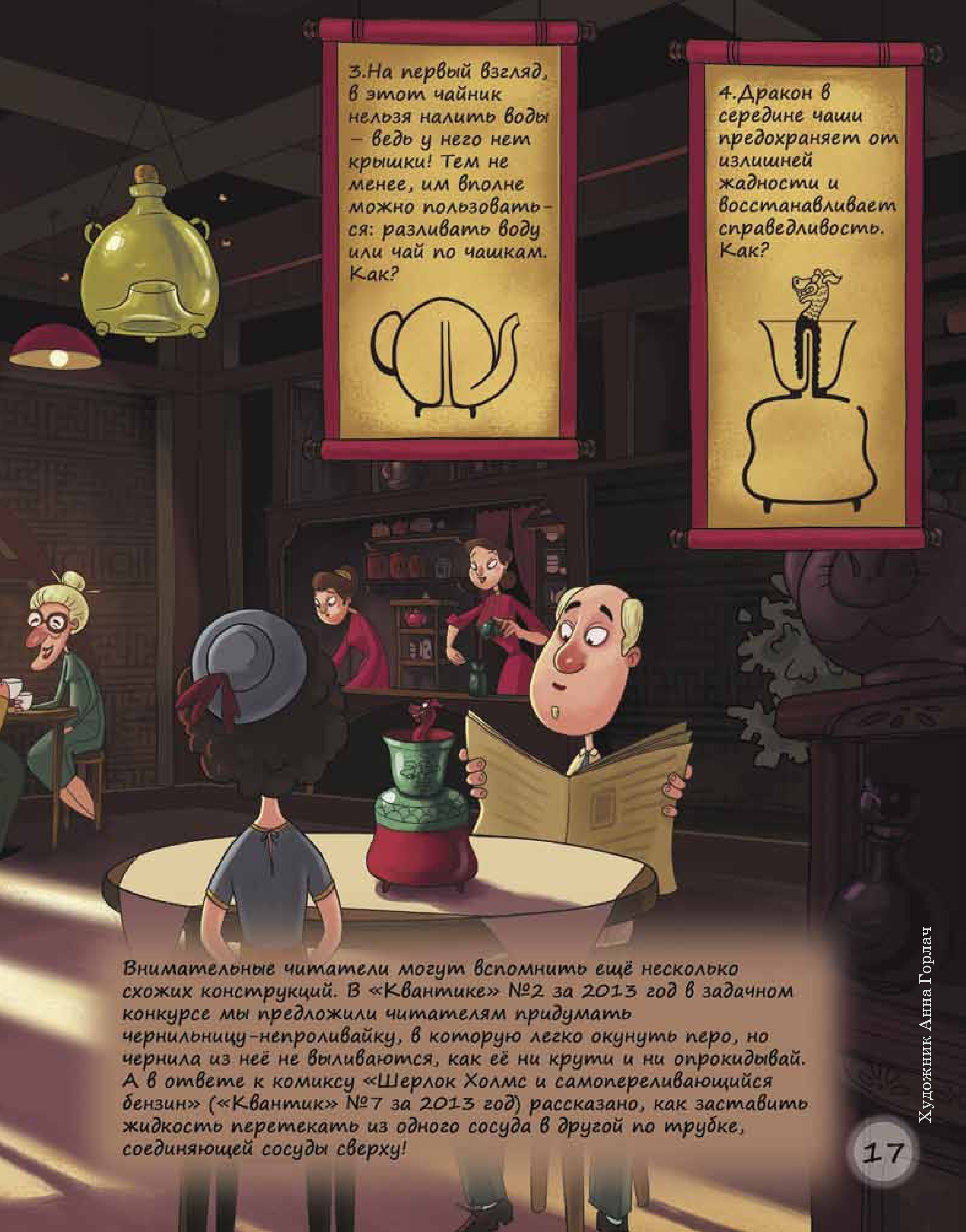
В каждой из задач изображён некий сосуд в разрезе. Вам нужно разобраться в его устройстве: понять, для какой цели его придумали и как он работает. Каждое из устройств решает какую-то вполне практическую задачу!

1. Этот чайник очень полезен, когда пришло много гостей. Никто не уйдёт обиженным! Почему?

2. Зачем нужен такой сосуд?



Много интересного об экзотических сосудах можно прочитать в статьях Анатолия Калинина «Сосуды с секретом» («Наука и жизнь», №4 за 2000 год) и «Напейся, но не облейся» («Наука и жизнь», №6 за 2002 год).



Внимательные читатели могут вспомнить ещё несколько схожих конструкций. В «Квантике» №2 за 2013 год в задачном конкурсе мы предложили читателям придумать чернильницу-непроливайку, в которую легко окунуть перо, но чернила из неё не выливаются, как её ни крути и ни опрокидывай. А в ответе к комиксу «Шерлок Холмс и самопереливающийся бензин» («Квантик» №7 за 2013 год) рассказано, как заставить жидкость перетекать из одного сосуда в другой по трубке, соединяющей сосуды сверху!

Художник Анна Горлач

Выпуск 3 2/3 ПРАВ/ды

Сергей Федин

ГАЙДАР, ЭЙНШТЕЙН И ЕСЕНИН

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

ГАЙДАР

Лет пятьдесят назад самым любимым детским писателем в нашей стране был Аркадий Гайдар. Наверное, каждый школьник читал его книжки про Тимура и его команду или Мальчиша-Кибальчиша.

Гайдар очень любил возиться с детьми и часто приезжал в гости к воспитанникам одного детского дома под Москвой. Однажды он решил в очередной раз навестить их. Когда писатель появился на пороге дома со старым потёртым чемоданом в руках, один из ребят не удержался и спросил:

– Как же так, Аркадий Петрович? Вы такой знаменитый, а чемоданчик у вас так себе?

– Это ничего, – улыбнулся Гайдар. – Гораздо хуже было бы, если бы чемодан у меня был знаменитый, а я – так себе.

ЭЙНШТЕЙН

Один из самых известных учёных за всю историю – немецкий физик Альберт Эйнштейн. Он придумал знаменитую теорию относительности и доказал, что ничто в нашем мире не может двигаться быстрее света.

Эйнштейн был очень рассеянным, и из-за этого с ним случались разные смешные истории. Как-то раз, когда он в задумчивости шёл по улице, его окликнул один приятель, тоже физик.

– А-а, – обрадовался Эйнштейн, – приходите ко мне сегодня вечером. У меня будет профессор Свенсон.

Позвольте, – поразился приятель. – Но ведь Свенсон – это я!

– Это совершенно не важно, – невозмутимо ответил Эйнштейн. – Всё равно приходите.

ЕСЕНИН

Ты, конечно же, не раз слышал стихи Сергея Есенина, прекрасного русского поэта, жившего в начале прошлого века. Ведь некоторые из них проходят в школе, другие, например «Клён ты мой опавший», стали известными песнями. Но вряд ли ты знаешь, что многие из них он написал... во сне. Да, да, Есенин обладал замечательной способностью во сне бормотать новые стихи. Он узнал об этом своём таланте случайно, от жены. Поначалу она старательно записывала его ночные стихи, но потом выдохлась и стала засыпать на самом интересном месте. И тогда Есенин придумал ставить на тумбочке рядом с кроватью включенный магнитофон. Утром ему оставалось лишь прослушать запись и записать новые шедевры.

Самые лучшие стихи при этом получались на рассвете, когда сон особенно чуток. Но когда однажды Есенин приехал в деревню к матери, она по старой привычке всё время будила его как раз в это время. Именно тогда расстроенный поэт написал своё знаменитое стихотворение, начинающееся словами «Не буди меня завтра рано, о моя терпеливая мать!».

Художник Капыч

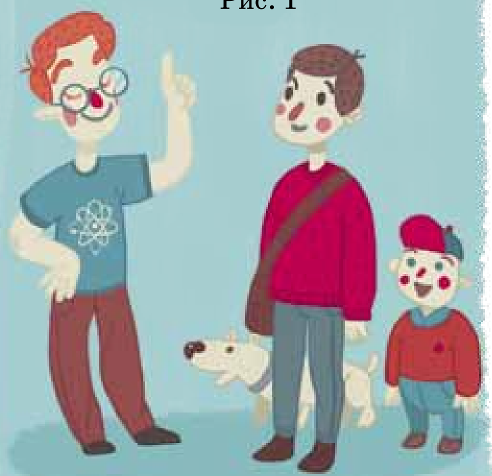
В. Крупский, А. Орлов

КОЗА НА ПРИВЯЗИ

Ранее публиковалось в журнале «Квант» № 5 за 1974 год.

После окончания занятий в вечерней математической школе, когда последние школьники уже ушли домой, мы увидели забытую кем-то тетрадь. Это был дневник без имени автора. Записи показались нам интересными, и мы решили напечатать выдержку из дневника.

Рис. 1



...Козы прожорливы и съедают всё, до чего могут дотянуться. Мой приятель ловко использовал это обстоятельство. Он жил в деревне и хорошо знал грибные места. Но когда приходили друзья и спрашивали, куда пойти завтра за грибами, он отвечал: «Коза покажет». В самом деле, к вечеру его коза съедала траву на участке в форме стрелки, направленной к самому грибному месту (рис. 1). Мне стало интересно, как это у него получается. Вчера я рассказал об умной козе моему соседу-математику, и вот что он мне ответил.

Математик. – Это совсем не так сложно, как ты думаешь. Давай разбираться с самого начала. Если в поле привязать козу к колышку десятиметровой верёвкой, то она съест траву, конечно, в круге радиуса 10 метров. Попробуем привязать её по-другому. В точках A и B вобьём колышки, между ними натянем верёвку. У второй верёвки один конец закрепим на ошейнике козы, а на другом конце сделаем петлю, которая будет скользить по первой верёвке. Теперь коза сможет съесть траву на участке, состоящем из прямоугольника и двух полукругов с центрами в точках A и B (рис. 2). Расстояние от точки границы «выеденного» участка до первой верёвки всегда равно длине второй верёвки.

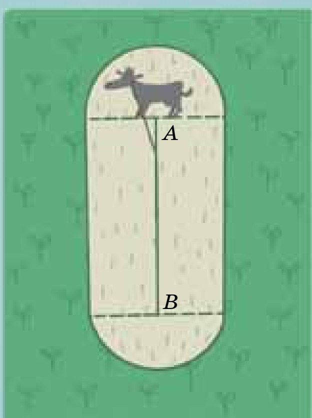


Рис. 2

Я. – А что такое «расстояние от точки до верёвки»? Ведь можно измерять расстояние от точки M до точки A, или до точки B, или до какой-нибудь внутренней точки C отрезка AB (рис. 3). Всё время мы будем получать разные результаты.

Математик. – Расстоянием от точки M до отрезка называется наименьшее из расстояний от точки M до точек отрезка. На рисунке 3 расстоянием от точки M до отрезка AB является длина отрезка MA, потому что MA – наименьший из отрезков, соединяющих точку M с точками отрезка AB. Если же основание C' перпендикуляра, опущенного на прямую AB из точки M', попадает в отрезок AB, то в качестве расстояния от M' до AB надо взять длину этого перпендикуляра $M'C'$.

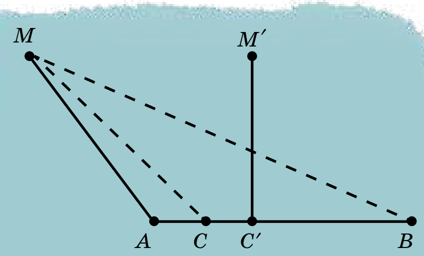


Рис. 3

Теперь попробуем «ограничить» козу прямоугольным участком. Постараемся использовать предыдущий результат. Вбив колышки в точках A и B и привязав козу, как мы делали раньше, ограничим ее уже знакомой фигурой, которую нарисуем чёрным карандашом (рис. 4). Если вбить колышки в точках C и D, то козе придётся питаться внутри фигуры, обведённой красным. Как ты думаешь, что будет, если мы к ошейнику козы привяжем две верёвки, по одной «от каждой фигуры»?

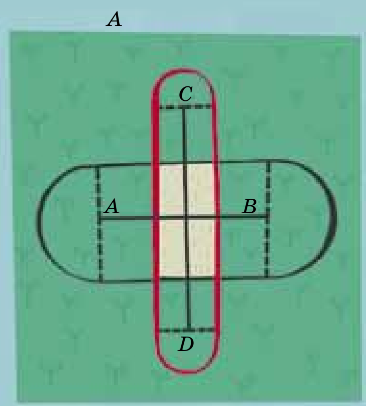


Рис. 4

Я. – Здорово придумано! Теперь она будет есть траву только внутри общей части чёрной и красной фигур, то есть внутри белого прямоугольника.

Математик. – Да, так и получится. Математики называют общую часть двух фигур их пересечением. Всегда, когда мы сумеем при помощи верёвок и колышков ограничить козу какими-то двумя фигурами, мы сможем ограничить её и пересечением этих фигур. Просто надо к ошейнику козы привязать верёвки и «от первой», и «от второй» фигур.

Я. – Но если козу привязать к колышку десятиметровой верёвкой, то она, вытянув шею, доберётся до травы, которая растёт дальше, чем в десяти метрах. Шея-то у неё длинная!

Математик. – Ты прав. Мы упрощаем дело – строим математическую модель. Например, мы считаем, что земля ровная, коза съедает всю траву, до которой может дотянуться, причём коза маленькая, а верёвки длинные, так что мы изображаем козу точкой.

Я. – И считаем, что верёвки не растягиваются и скользят друг по другу. И ещё – очень важно! – что коза не запутывается в верёвках и может перепрыгнуть через них.

Рис. 5

Математик. – Совершенно верно. Теперь вернёмся к твоему приятелю. Стрелка – это пересечение параллелограмма и прямоугольника (рис. 5), так что ничего удивительного в поведении козы нет, она может «построить» и более интересные фигуры.

Задача 1. Попробуй ограничить козу параллелограммом.

Задача 2. Ограничь козу

а) треугольником;

б) правильным шестиугольником;

в) заданным выпуклым многоугольником.

Я. – Решив эти задачи, я смогу заставить козу «съесть» и сектор.

Математик. – Конечно, ведь сектор – это пересечение треугольника с кругом, а обе эти фигуры ты сможешь получить. Кстати, вот тебе ещё задача.

Задача 3. Как заставить козу съесть полукруг?

Я. – Я подумаю над твоими задачами. Интересно, ты сам полностью придумал «теорию голодной козы» или воспользовался какими-нибудь математическими понятиями?

Математик. – Я уже говорил о таких вещах, как расстояние от точки до отрезка, пересечение фигур. Но, по-моему, самое нужное математическое понятие, которое использовалось, – это понятие «окрестности фигуры радиуса R».

Определение. *Окрестностью радиуса R фигуры Φ* называется множество всех тех точек, расстояние от которых до фигуры Φ не превосходит R (здесь R – неотрицательное число).

Я. – А что такое «расстояние от точки до фигуры»?

Математик. – Это естественное обобщение понятия «расстояние от точки до отрезка».

Определение. *Расстоянием от точки M до фигуры Φ* называется наименьшее из расстояний от точки M до точек фигуры Φ.

Я. – Значит, окрестность радиуса R точки – это круг радиуса R, окрестность радиуса R отрезка AB – та самая фигура, с которой ты начал разговор (рис. 2). А что такое окрестность радиуса 0?

Математик. – Сама фигура Φ. Вообще, если $R_1 < R_2$, то окрестность радиуса R_1 фигуры является частью окрестности радиуса R_2 этой же фигуры.

Я. – А прямоугольник является пересечением окрестностей отрезков (рис. 4). Интересно…

Математик. – Заметим, что окрестность радиуса R фигуры Φ состоит из тех и только тех точек плоскости, что лежат в окрестности радиуса R хотя бы одной из точек Φ, то есть лежат в одном из кругов радиуса R с центрами в точках Φ. Кстати, вот тебе ещё задачи.

Задача 4. Что является окрестностями радиуса 1 следующих фигур (см. рис. 6):

а) креста;
б) окружности;
в) прямоугольника;
г) границы этого прямоугольника?

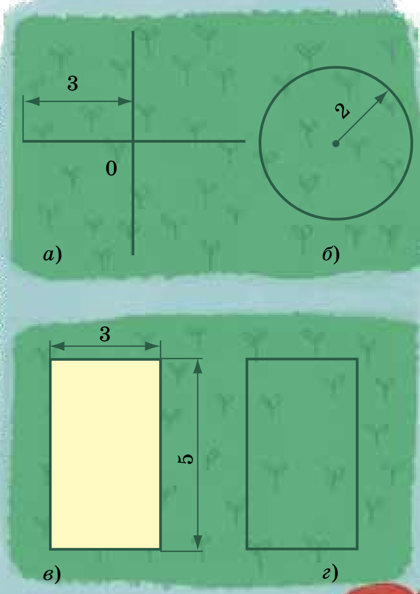


Рис. 6

Задача 5. Какова площадь окрестности радиуса R выпуклого многоугольника с периметром P и площадью S? (Подсказка: площадь круга радиуса R равна πR^2.)

Я. – Мы забыли про козу.

Математик. – Нет, почему же? Если у нас есть проволока, можно петлю верёвки длины R надевать на неё. Тогда коза съест окрестность радиуса R проволочного контура. Мы считаем, конечно, что контур приварен к единственному колышку, так что он неподвижен и петля свободно скользит по нему.

Я. – Значит, с помощью проволоки можно заставить козу съесть окрестности радиуса R окружности и границы прямоугольника?

Математик. – Да. Вот с окрестностью креста дело обстоит сложнее.

Задача 6. Подумай, какой нужен проволочный контур, чтобы получить окрестность креста.

Я. – Действительно, сам крест в качестве контура не подойдёт – ведь через точку O (рис. 6, а) петля не пройдёт. Надо подумать… Интересно, можно ли в «теории голодной козы» использовать окрестность самого прямоугольника, а не его границы?

Математик. – Построим низкую загородку по границе прямоугольника так, что коза легко

перепрыгивает через неё. Один конец верёвки длины R привяжем к ошейнику, а другой – к рогульке-«якорю», который может двигаться только внутри прямоугольника. Перетащить его через загородку коза не может. Тогда коза будет питаться в окрестности радиуса R прямоугольника.

Ты, может быть, знаешь, что разностью $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ двух фигур Φ_1 и Φ_2 называют фигуру, состоящую из всех тех точек Φ_1, которые не лежат в Φ_2. Например, разностью прямоугольника со сторонами 30 м и 40 м и окрестностью его границы радиуса 5 м будет прямоугольник со сторонами 20 м и 30 м (рис. 7).

Я. – В «теории голодной козы» это можно использовать так. К прямоугольному проволочному контуру 30 м × 40 м пятиметровой цепью привяжем собаку. Она будет бегать по окрестности радиуса 5 м границы этого прямоугольника и не пускать козу за пределы прямоугольника 20 м × 30 м.

Математик. – Вот похожая задача.

Задача 7. Как одной собакой удержать непривязанную козу в полукруге?

Рис. 7

«Теорию голодной козы» можно развивать в разных направлениях. Например, можно пользоваться только колышками и верёвками и требовать, чтобы все верёвки были постоянно натянуты. Тогда заставить козу ограничиться прямоугольником $ABCD$ можно так: вбить колышки в вершинах прямоугольника, натянуть верёвки между A и B и между C и D, набросить верёвочное кольцо на верёвки AB и CD, натянуть его до отказа и привязать козу к кольцу. Ведь для точек прямоугольника сумма расстояний до двух противоположных сторон постоянна. Теперь ты сможешь заставить козу «съесть» треугольник и при новых ограничениях...

Следующий лист был выдран, и мы не узнали о дальнейшем развитии «теории голодной козы». Может быть, читатели «Квантика» помогут нам и предложат свои варианты теории?

Художник Ануш Микаелян

XX ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А.П. САВИНА

Александр Шаповалов

Есть такие школьники, которым интересно заниматься математикой даже летом. Их ждут летние лагеря и школы, а самых честолюбивых – турниры. Московским школьникам (и не только им) особо приглянулся турнир математических боёв имени А.П.Савина. Последнее десятилетие он проводится в Костромской области на базе отдыха «Берендеевы поляны», всегда с 26 июня по 2 июля.

Турнир этого года был юбилейным – двадцатым. Он собрал 36 команд из Москвы, Санкт-Петербурга, Черноголовки и Ярославля, от пятиклассников (игравших за 6 класс) до девятиклассников.

В день открытия турнира команды по традиции размялись игрой «Математический квадрат». Им выдали по 25 задач, записанных в клетки квадрата. Проверялись только ответы, и, кроме баллов за верные ответы, начислялись ещё премии за верные решения целого столбца задач или целой строки. Игра была азартной, поскольку те, кто «закрывал» ряд первыми, премировались вдвойне.

Разбить команды на лиги не только в соответствии с возрастом, но и с учётом их реальной силы позволила устная командная олимпиада. Погода была хорошая, и жюри, как обычно, сидело на улице, а школьники – у себя в разбросанных по территории домиках, откуда с энтузиазмом прибегали сдавать решения. Олимпиады не было только у девятиклассников: их было всего 6 команд, где уж тут делиться на лиги, и они сразу начали первый тур матбоёв.

А на следующий день начались бои и у остальных классов. Команды с утра получали вариант из восьми нестандартных задач (жюри стремилось подбирать интересные и разнообразные). До обеда команды старались их решить (и редко когда удавалось решить все 8), а после обеда – бились с другими командами. Сам бой похож на диалог: команды более-менее по очереди рассказывают свои решения, а в решениях соперников стараются разобраться и, по возможности, опровергнуть. Львиную долю времени школьники общаются друг с другом, жюри вступает в диалог редко, в основном начисляя баллы.

Каждый бой длился 2 – 3 часа, редко дольше, и у школьников оставалось время для спорта, прогулок и экскурсий. После ужина большой популярностью пользовались интеллектуальные игры.

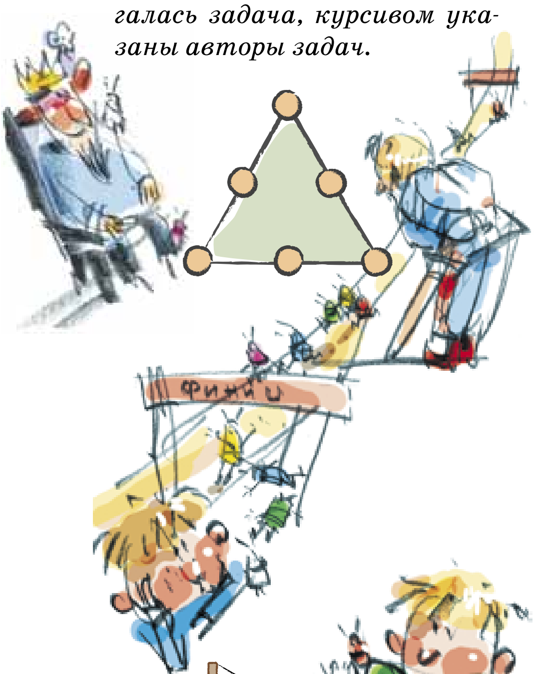
В середине турнира был день отдыха: полдня – автобусные экскурсии, полдня – личная устная олимпиада по параллелям. Как обычно, самые красивые (но сравнительно легкие) задачи приберегались именно для этой олимпиады. И если во время боя школьник имел право рассказать решения максимум двух задач, то здесь можно было рассказывать все 9 (и во всех классах, кроме 9-го, победителям это удалось!).

По итогам турнира все команды-участницы и все призёры личной олимпиады награждались памятными дипломами, сувенирами и книгами по математике. Особой популярностью пользовалась книга «Как готовиться к математическим боям. 400 задач турниров имени А.П.Савина». Видимо, ребята хотели хорошо подготовиться и к турниру следующего года!

XX ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А.П. САВИНА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи сгруппированы по тематическим разделам, в скобках после номера – классы, для которых предлагалась задача, курсивом указаны авторы задач.



Алгебра

1. (6 – 7) Кащей назовёт Ивану шесть различных чисел. Докажите, что Иван сможет расставить их в кружочки на рисунке так, чтобы суммы чисел на сторонах треугольника оказались различными.

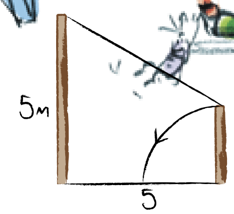
Александр Шаповалов

2. (7) На тараканьих бегах 20 тараканов выбегают друг за другом с интервалом в 1 минуту и бегут с постоянными скоростями. Второй догнал первого через 2 минуты после своего старта, третий второго – через 3 минуты после своего старта, ..., двадцатый девятнадцатого – через 20 минут после своего старта. Через сколько минут после своего старта двадцатый таракан догнал первого?

Александр Шаповалов

3. (7) Лёша записал в вершинах квадрата четыре числа с суммой 100. Саша у каждой стороны записал произведение в её концах и вычислил сумму на сторонах. Потом Лёша увеличил на 1 два числа в концах одной из сторон, а Саша точно так же посчитал новую сумму на сторонах. На сколько новая Сашина сумма больше старой?

Алексей Заславский, Александр Шаповалов



Геометрия

4. (7) У прямой дороги на расстоянии 5 метров стоят два столба. Высота более высокого столба – тоже 5 метров. Между верхушками столбов натянут провод. Подул ветер, и маленький столб упал на дорогу в направлении высокого столба, как показано на рисунке. Что стало с проводом: он провисает, он снова натянут или он порвался?

Михаил Раскин, Егор Бакаев

Комбинаторная геометрия

5. (6 – 7) Можно ли отметить на плоскости 7 точек так, чтобы среди треугольников с вершинами в этих точках более 20 были прямоугольными?

Эмма Акопян

6. (7) Внутри равностороннего треугольника отметили точку, соединили её с вершинами и разрезали треугольник по этим отрезкам. Можно ли было выбрать точку так, чтобы из полученных треугольников без сгибов и наложений удалось сложить другой треугольник?

Арина Банникова

Комбинаторика

7. (6 – 7) Осенью «Зенит» установил рекорд футбольной Лиги чемпионов: занял в двухкруговом турнире из 4 команд «чистое» второе место всего с 6 набранными очками.

Можно ли побить этот рекорд (занять «чистое» второе место с меньшим количеством очков)? (В турнире дают 3 очка за победу, 1 – за ничью и 0 – за поражение. Команда занимает «чистое» место, если все остальные команды набрали не равное ей число очков. В двухкруговом турнире каждая пара команд сыграла между собой ровно 2 раза.)

Александр Блинков

8. (6 – 7) В каждом квадрате клетчатой полоски 1×43 провели диагональ, а затем справа пририсовали ещё один треугольник, как показано на рисунке. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок красит неокрашенную сторону или диагональ в красный или синий цвет по своему усмотрению. Нельзя покрасить все три стороны треугольника в один цвет. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

Александр Шаповалов

9. (6 – 7) Из 6 монет две более лёгкие – фальшивые. Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо предварительно заплатить одну монету. Если уплаченная монета настоящая, весы показывают правильный результат, а если фальшивая – могут показать что угодно. Как найти (и не потратить) одну настоящую монету?

Виктор Клепцын, Алексей Заславский

10. (7) На доске было написано число 10000. После этого с числом, написанным на доске, производят несколько раз такую операцию: если в записи числа на доске есть хотя бы одна нечётная цифра, то из него вычитают 1, иначе из него вычитают 2. За какое количество операций на доске получится число 0?

Константин Кноп

Логика

11. (6 – 7) Дети шли взвешиваться и высказывали друг другу предположения. В результате взвешиваний оказалось, что все веса различны и любая девочка легче любого мальчика. Кроме того, каждое предположение, высказанное лицу другого пола, оказалось неверным, а своему полу – верным. Сохранились реплики четверых из них, обращённые друг к другу. Миша – Саше: «Я легче Вали». Саша – Вале: «Я легче Жени». Валя – Жене: «Я легче Миши». Женя – Мише: «Я легче Саши». Определите пол Вали, Жени и Саши.

Александр Шаповалов

Художник Сергей Чуб

«НАШ КОНКУРС» («Квантик» №8)

36. *В стране три города: А, В и С. Жители города А всегда говорят правду, города В – лгут, а города С – строго попеременно лгут и говорят правду. В одном из городов случился пожар. Дежурному на каланче позвонили. Состоялся такой диалог:*

– У нас пожар!

– Где горит?

– В городе С.

Куда ехать пожарным?

Фразы звонившего не могли принадлежать ни жителю города A (его фразы противоречили бы друг другу), ни жителю города C (он либо оба раза сказал бы правду, либо оба раза солгал). Значит, звонили из B. Тогда обе фразы лживы, и значит, пожар – в городе A.

37. *Пешеход идёт вдоль шоссе с постоянной скоростью. Каждые 6 минут он видит попутный автобус, а каждые 3 минуты – встречный. Автобусы едут в обе стороны с одной и той же скоростью и отправляются из конечных пунктов через равные промежутки времени. Найдите эти промежутки.*

Так как автобусы идут в обе стороны с равными промежутками, то откуда бы ни начал движение пешеход, и в какую бы сторону по дороге он ни шёл, каждые 6 минут он будет видеть попутный автобус, а каждые 3 минуты – встречный.

Выпустим пешехода из точки A встречи двух автобусов. Пусть он 6 минут идёт вперёд из точки A до точки B, а потом 6 минут идёт назад (из B в A). Посмотрим, сколько автобусов, проехавших через A в направлении B, он насчитает за эти 12 минут. Первый такой автобус догоняет его в момент выхода из A, и за первые 6 минут пешехода догонит ещё один такой автобус (в точке B). Тут же развернувшись, пешеход пойдёт обратно, и значит, за следующие 6 минут встретит ещё два автобуса, едущие из A в B (второй он встретит прямо в точке A).

Получается, что за 12 минут точку A проедут 4 автобуса (причём первый – как раз в момент начала этих 12 минут, а четвёртый – в момент окончания). Значит, эти 12 минут состоят из трёх временных промежутков между автобусами, то есть один промежуток равен 4 минутам.

38. *Коля и Вася зашли в магазин, где всё стоит целое число рублей. Коля купил 3 пачки сока и 4 булочки, после чего расплатился без сдачи несколькими 10-рублёвыми монетами. Вася же купил 9 пачек сока и 2 булочки. Докажите, что и он сможет расплатиться без сдачи 10-рублёвыми монетами.*

Пусть пачка сока стоит x рублей, а булочка – y. Тогда Коля заплатил $3x+4y$ рублей, и эта сумма делится на 10. Утроим её – получится число $9x+12y$, и оно тоже делится на 10. Но Вася должен заплатить $9x+2y$ рублей – ровно на $10y$ меньше, то есть это тоже делящееся на 10 число.

39. *Петя нарисовал 5 рисунков. На каждом рисунке он изобразил несколько прямых и отметил все точки пересечения этих прямых друг с другом. В результате на первом рисунке он отметил всего 1 точку, на втором – 2, на третьем – 3, на четвертом – 4 и на пятом – 5.*

а) Приведите примеры таких рисунков.

б) Про какие из Петиных рисунков можно наверняка сказать, сколько на них проведено прямых?

а) Примеры изображены на рисунке 1:

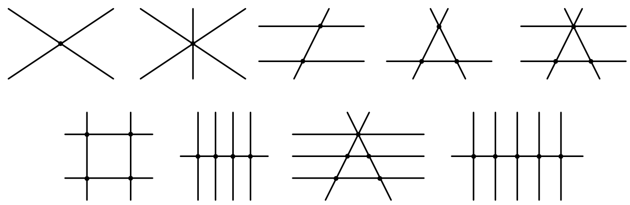


Рис. 1

б) **Ответ:** только про тот, где отмечены две точки пересечения: на нём обязательно будут изображены ровно три прямые. Докажем это. Возьмём одну из точек пересечения (назовём её A): в ней пересекаются какие-то две прямые l_1 и l_2 (как на рисунке 2). Так как есть ещё одна точка пересечения (назовём её B), есть ещё и третья прямая m (не проходящая через точку A). Если m не параллельна ни l_1, ни l_2, то сразу получаем минимум три точки пересечения – противоречие.

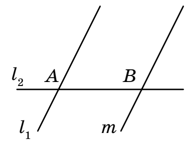


Рис.2

Значит, она параллельна, например, прямой l_1 (и пересекает l_2 в точке B). Получили рисунок с тремя прямыми. Больше никакой другой прямой провести не удастся без добавления точек пересечения: если новая прямая проходит через A и не совпадает ни с l_1, ни с l_2, то она пересечёт m в новой точке. Если новая прямая проходит через B и не совпадает ни с m, ни с l_2, то она пересечёт l_1 в новой точке.

А на других рисунках может быть изображено разное число прямых, как видно из решения пункта а).

Вообще, для любого количества точек N, большего двух, легко привести примеры с разным числом прямых. Это хорошо видно из рисунка 3. В зависимости от того, проводить ли пунктирную прямую на этом рисунке или нет, мы получим пример либо с N, либо с $N+1$ прямыми.

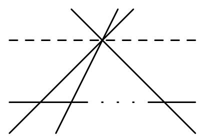


Рис. 3

40. *Три одинаковые банки с тремя разными красками наполнены на две трети каждая. Есть возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую (при этом краски, оказавшиеся в одной банке, равномерно перемешиваются). Как сделать во всех банках одинаковую смесь? (Другой посуды нет, выливать краску нельзя.)*

Разольём поровну краску из третьей банки в первую и вторую (они заполнятся доверху). Перемешав содержимое первой банки, отольем половину жидкости в третью банку. То же сделаем со второй банкой. В результате третья банка наполнится доверху, и в ней получится равномерная смесь (ведь в неё попадёт половина от количества первой краски, половина от количества второй краски и два раза по четверти (то есть тоже половина) от количества третьей краски). Затем перельём содержимое второй банки в первую: там тоже образуется равномерная смесь (так как там окажется вся оставшаяся жидкость, кроме той, что в третьей банке). Теперь останется только отлить по трети из первой и третьей банок во вторую, и мы получим во всех трёх банках равномерную смесь.

ДВЕ ЗМЕИ («Квантик» № 9)

а) Фрагмент такого лаза изображён на рисунке 1. Всюду, кроме узкого места, ширина лаза почти равна ширине змеи. В узком месте ширина лаза меньше, чем удвоенная ширина змеи (сечение узкого места изображён на рисунке 2). Длинная змея, пройдя всю петлю, помешает сама себе пролезть через узкое место.

Рис. 1

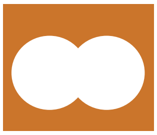


Рис. 2

б) Можно сделать лаз, в котором надо будет перебраться через глубокий ров с отвесными стенками, дотянувшись до другого края. Можно подобрать ширину рва так, чтобы длинная змея могла это сделать, а короткая – нет.

Или пусть лаз сначала идёт горизонтально, а потом уходит вертикально вниз на большую глубину, но в его стенке есть ответвление, ведущее к выходу. Можно сделать так, чтобы длинная змея могла дотянуться до ответвления, держась хвостом за горизонтальную часть, а короткая змея проваливалась вниз, откуда нет выхода.

КАСАТЕЛЬНЫЕ И РАДИУСЫ

Никакого противоречия нет. Когда вы крутитесь на карусели, вас тянет прочь от центра, а не по направлению движения карусели. Капли на крутящемся колесе тоже тянет прочь от центра, поэтому сосульки растут по радиусам. Когда вы будете спрыгивать с карусели, ваши «попутчики» по развлечению увидят, как вы отлетите, опять же, вдоль радиуса (по крайней мере, сначала).

А как всё это выглядит с земли? В момент отрыва вы почти не движетесь относительно карусели, но относительно земли-то карусель быстро крутится. Так что с точки зрения «землян» вы (вместе с полом карусели под вами) несётесь вдоль окружности карусели, даже ещё не спрыгнув с неё. Когда вы разлучитесь, «земляне» увидят, как вы продолжаете свободно лететь в том же направлении, то есть двигаясь по касательной, как и брызги, слетающие с колеса.

Удивительного тут не больше, чем в следующем «парадоксе». Для пассажира машины шип на её колесе движется по окружности, а для пешехода – по сложной завитой линии (циклоиде).

ГОРОХОВЫЙ КОНСТРУКТОР

1. Таких многогранников несколько. Один из примеров – на рисунке 1.

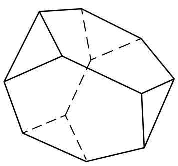


Рис. 1

2. В додекаэдре можно найти 5 разных восьмёрок вершин, являющихся вершинами куба! Один из вариантов – на рисунке 2.

Рис. 2

3. Пример такого многогранника изображён на рисунке 3. Можно доказать, что в любом выпуклом многограннике найдутся две грани с одинаковым числом вершин.

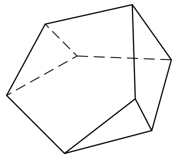


Рис. 3

ДАЙТЕ ПУШКИНУ СДАЧИ

Пушкин и Александр Первый подошли к речке с разных берегов.

СОСУДЫ С СЕКРЕТОМ

1. За один наклон из чайника выливается только та жидкость, что была в носике и его продолжении. Значит, каждому гостю достанется поровну напитка, да и налить слишком много по невнимательности невозможно. В Китае подобные сосуды называли «один глоток».

2. Это сосуд-ловушка для насекомых, которые залетают снизу, учуяв сладкий запах сиропа на донышке. Выбраться им сложно, потому что они окружены стеклом со всех сторон.

3. Чтобы наполнить этот чайник, нужно перевернуть его, налить воду в дырку (примерно до двух третей) и перевернуть обратно. Из картинки видно, почему после этого вода не будет проливаться.

4. По легенде, эту конструкцию придумал Пифагор для того, чтобы в чашу нельзя было налить жидкости больше определённого объёма. Как же пользоваться чашей?

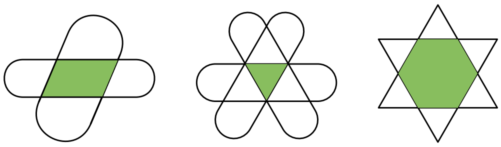
Верхняя и нижняя ёмкости соединены с помощью тонкого канала. Пока уровень воды в верхней ёмкости не доходит до изгиба канала, вода из верхней ёмкости не может перелиться вниз, и чаша в использовании ничем не отличается от обычной. Но если налить воды в чашу до уровня выше изгиба тонкой внутренней трубки, вся вода выльется в ёмкость. О том, почему так произойдёт, рассказано в статье «Шерлок Холмс и самопереливающийся бензин» из «Квантика» №7 за 2013 год.

ГАЙДАР, ЭЙНШТЕЙН, ЕСЕНИН

История с Есениным никак не может быть правдой, ведь в те времена еще не было магнитофонов. К тому же его настоящее стихотворение начинается словами «*Разбуди* меня завтра рано, о моя терпеливая мать!»

КОЗА НА ПРИВЯЗИ

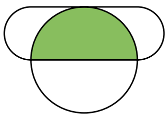
1, 2, а, б).Фигуры надо представить в виде пересечения уже полученных.



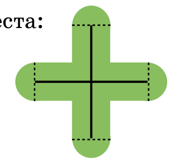
2, в). Достаточно представить многоугольник в виде пересечения нескольких фигур с рисунка 1, будем называть такие фигуры (окрестности отрезка) «овалами».

Сначала через одну из сторон многоугольника проведём прямую. Так как многоугольник выпуклый, он целиком будет лежать по одну сторону от прямой. Теперь нарисуем большой овал так, чтобы он одной своей границей шёл вдоль этой прямой и содержал бы весь многоугольник внутри себя. Проделаем то же самое для каждой стороны многоугольника. Нетрудно сообразить, что пересечение всех полученных овалов и будет исходным многоугольником.

3.



4. Окрестность креста:



Окрестность окружности – кольцо. Окрестности прямоугольника и его границы можно увидеть на рисунке 7 в статье.

5. Ответ: $S+PR+\pi R^2$.

Окрестность выпуклого многоугольника состоит из следующих частей: самого многоугольника; прямоугольников, основания которых – стороны многоугольника, а высоты равны R; секторов радиуса R с центрами в вершинах многоугольника. Суммарная площадь прямоугольников равна PR, а из секторов складывается круг радиуса R.

6. Искомый контур – это граница окрестности вдвое меньшего радиуса этого креста.

7. Искомый контур – это граница окрестности этого полукруга.

XX ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А. П. САВИНА

1. Иван может упорядочить названные Кащеем числа $a<b<c<d<e<f$ и расставить их как на рисунке 1. Тогда $a+b+d<a+c+f$, так как $b<c$ и $d<f$. Кроме того, $a+c+f<d+e+f$, поскольку $a<d$ и $c<e$. В итоге $a+b+d<a+c+f<d+e+f$, то есть все три суммы на сторонах различны.

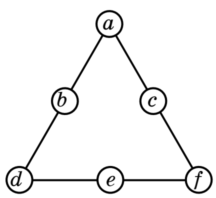


Рис. 1

2. Ответ: через 2 минуты.

Второй таракан выбегает через минуту после первого и догоняет его за 2 минуты. При этом они пробегают одно и то же расстояние, поэтому скорость второго таракана в $\frac{3}{2}$ раз больше, чем скорость первого. Аналогично, третий таракан бежит в $\frac{4}{3}$ раза быстрее второго, ... двадцатый – в $\frac{21}{20}$ раз быстрее девятнадцатого. Следовательно, скорость двадцатого таракана в $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{21}{20}=\frac{21}{2}$ раз больше, чем у первого, а скорость их сближения равна $\frac{19}{2}$ скорости первого. Между ними было расстояние, которое первый таракан преодолел за 19 минут, поэтому двадцатый таракан догнал его через $19:\frac{19}{2}=2$ минуты.

Замечание. Как видно из решения, ответ не зависит от порядкового номера догоняющего таракана.

3. Ответ: на 101.

Пусть Лёша записал в вершинах куба числа a, b, c, d в указанном порядке. Тогда $a+b+c+d=100$. Саша получил сумму произведений $ab+bc+cd+da=X$. Пусть Лёша увеличил на 1 числа a и b. Новая сумма произведений $(a+1)(b+1)+(b+1)c+cd+d(a+1)=(ab+bc+cd+$ $+da)+a+b+1+c+d=X+100+1$ больше старой на 101.

4. Ответ: провод натянут.

Введём обозначения так, как показано на рисунке 2, и проведём BC. Так как треугольник BAC – прямоугольный и равнобедренный, то $\angle BCA=45°$, тогда и $\angle BCD=45°$. Треугольники BCE и BCD равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BE=BD$.

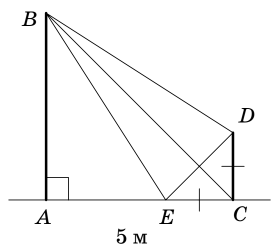


Рис. 2

В процессе падения провод также не мог порваться. Действительно, конец столба прочертил дугу *внутри* треугольника BDE, а этот треугольник лежит, очевидно, внутри круга с центром B и радиусом $BD=BE$. Значит, расстояние от B до вершины падающего столба в любой момент было не больше BD.

5. Ответ: можно.

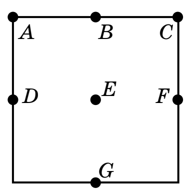


Рис. 3

Отметим две соседние вершины квадрата, его центр и середины всех сторон (рис. 3). В полученной конструкции 21 прямоугольный треугольник: ABE, BED, ADE, ABD, CFE, BEF, BCF, BCE, DEG, EFG, ACF, ACD, CFD, ADF, ABG, BCG, AEC, BDF, BFG, DFG, BDG.

6. Ответ: можно.

Отложим на высоте CH равностороннего треугольника ABC такую точку D, что $DH=AH=BH$. Тогда все углы треугольников ABD, ADC и BDC легко считаются (рис. 4), и из этих треугольников складывается треугольник $DC'C''$ (рис. 5). Треугольники ADC, BDC на рисунке 4 равны треугольникам ADC' и BDC'' на рисунке 5.

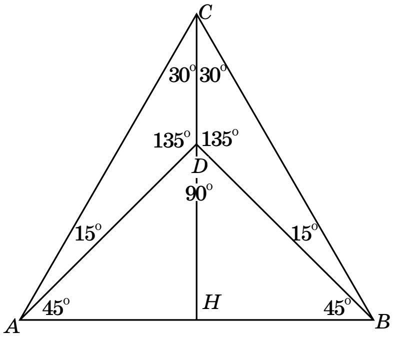


Рис. 4

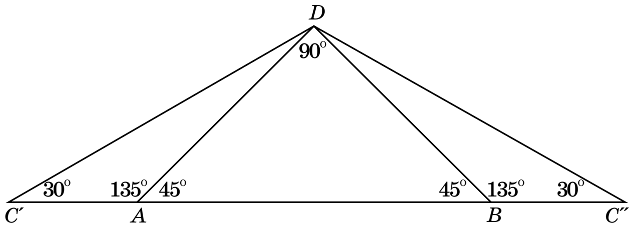


Рис. 5

7. Ответ: можно.

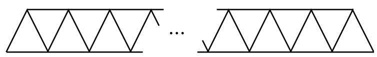
Как команда может занять «чистое» второе место, набрав 5 очков, показано в таблице.

1	2	3	4	Очки
	3 1	3 3	3 3	16
0 1		1 1	1 1	5
0 0	1 1		1 1	4
0 0	1 1	1 1		4

Замечание. Менее чем с 5 очками «чистого» второго места занять нельзя. Действительно, в матчах между 2-й, 3-й и 4-й командами было разыграно не менее 12 очков. Значит, либо они все набрали по 4 очка, либо 2-я набрала как минимум 5.

8. Ответ: выигрывает Петя.

Рис. 6



Изобразим полоску немного в другом виде, как бы «скосив её набок» так, чтобы у неё появилась ось симметрии (рис. 6), суть игры от этого не изменится. Первым ходом Петя может покрасить центральный отрезок на верхней стороне в любой цвет, а дальше после каждого хода Васи может выбирать отрезок, симметричный только что покрашенному, и красить его в другой цвет. При такой стратегии центральный треугольник не может быть покрашен в один цвет. А если бы после хода Пети образовался другой треугольник с одноцветными сторонами, то симметричный ему был бы уже покрашен в один цвет после хода Васи. Таким образом, Петя не проиграет, а так как игра рано или поздно закончится, то он выиграет.

9. Укажем способ найти настоящую монету, если выяснится, что среди трёх монет не более одной фальшивой (назовем такую тройку монет *хорошей*). Для этого сравним две из этих монет, заплатив третьей монетой. При неравенстве в качестве настоящей укажем на более тяжёлую монету, при равенстве – на любую монету с весов. Действительно, мы укажем верно, если заплачено настоящей монетой, а если заплачено фальшивой, то на весах обе монеты – настоящие.

Итак, изначально у нас есть шесть монет. Заплатим 6-ю за взвешивание первых двух.

Случай 1. Весы показали неравновесие. Тогда фальшива или 6-я, или более лёгкая из взвешенных. Поэтому тройка монет «3-я, 4-я и более тяжёлая на весах» – хорошая, и мы можем найти среди них настоящую.

Случай 2. Весы показали равенство. Тогда сравним 1-ю с 3-й, заплатив 5-й монетой. При неравенстве аналогично тройка «2-я, 4-я и более тяжёлая» – хорошая, из неё найдем настоящую. При равенстве во второй раз хорошей будет тройка «1-я, 2-я, 3-я». Действительно, иначе 4-я, 5-я и 6-я монеты – настоящие, т.е. показания весов были достоверными, и первые три монеты – одинаковые. Противоречие.

10. Ответ: за 9376 операций.

Назовём натуральное число *особым,* если все его цифры чётны. Только из особых вычитается 2. Заметим, что никакое особое число не будет пропущено. Действительно, «перепрыгнуть» через число x можно, только вычтя 2 из $x+1$. Однако тогда $x+1$ – особое, и, значит, чётное, а x – нечётное, то есть не особое. Итак, количество вычитаний 2 равно количеству особых чисел, меньших 10000. Для удобства подсчёта к каждому такому числу припишем, если надо, нули в начало, чтобы оно стало четырёхзначным. Есть 5 чётных цифр, и количество четырёхзначных записей из них равно $5^4=625$. Отбросив запись 0000, найдём, что 2 вычиталось 624 раза. Вычитая по 1, мы получили бы 0 из 10000 за 10000 вычитаний. Благодаря вычитаниям по 2 мы «сэкономим» 624 вычитания, то есть 0 будет получен за $10000-624=$ $=9376$ операций.

11. Ответ: Валя, Женя и Саша – девочки.

Предположим, что Женя – мальчик. В этом случае его высказывание было верным, то есть он легче Саши. Следовательно, Саша также является мальчиком. Тогда из утверждения Миши получаем, что и Валя – мальчик. Значит, все дети были правы в своих предположениях, но высказывания Миши и Вали противоречат друг другу.

Таким образом, Женя – девочка. Из её высказывания следует, что она тяжелей Саши, поэтому Саша также является девочкой. Тогда Саша оказалась права, из чего следует, что и Валя – девочка. Легко убедиться, что когда Валя, Женя и Саша – девочки и Саша легче Жени, все условия выполнены.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем **конкурсе**.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 ноября по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11,
журнал «Квантик».

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Итоги будут подведены в конце года. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги, диски с увлекательными математическими мультфильмами.

Желаем успеха!

X ТУР

46. Король со свитой движется из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/ч. Каждый час он высылает в пункт B гонцов, бегущих со скоростью 20 км/ч. С какими интервалами прибывают гонцы в пункт B?

Авторы задач: Игорь Акулич (49)

47. Нарисуйте на листе бумаги

а) 4 точки;

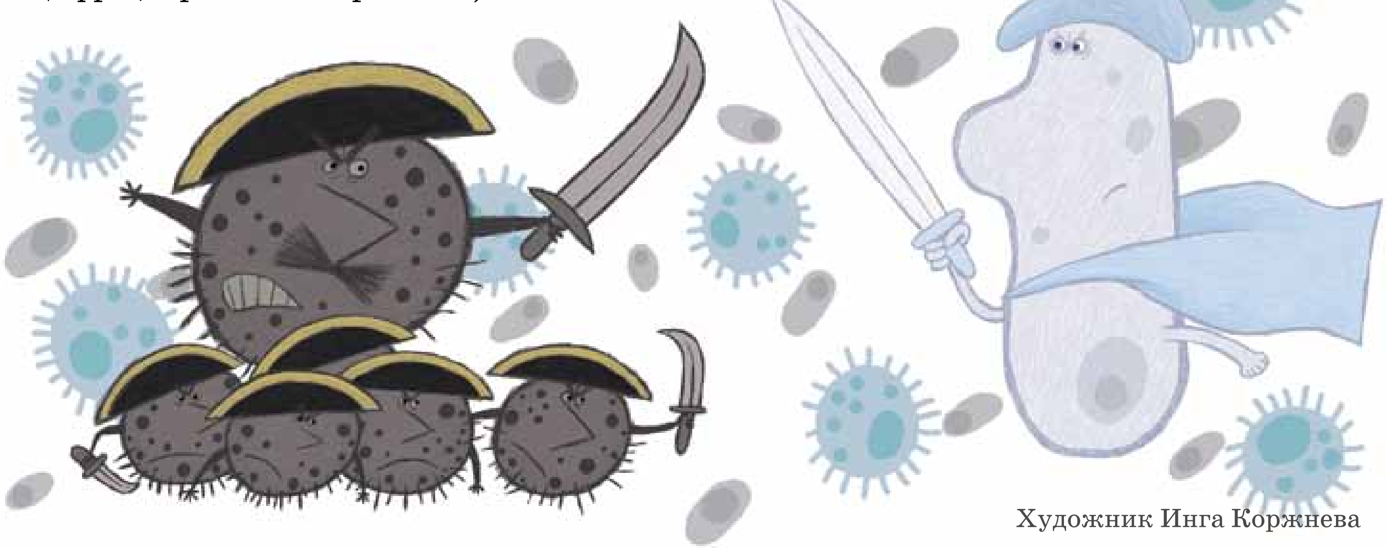
б) 5 точек;

в) 6 точек так, чтобы любые три из них были вершинами равнобедренного треугольника.

48. В колонию из 100 черных бактерий попадает белая бактерия. Каждую секунду одна белая бактерия уничтожает одну чёрную бактерию, после чего все бактерии делятся надвое. Докажите, что рано или поздно все чёрные бактерии будут уничтожены, и выясните, в какой момент это произойдёт.

49. На спортивном складе было поровну футбольных и волейбольных мячей. Когда из склада забрали часть волейбольных мячей, футбольных мячей стало в 7 раз больше, чем волейбольных. Когда затем изъяли еще 3 каких-то мяча, футбольных мячей стало в 20 раз больше, чем волейбольных. Сколько мячей было на складе первоначально?

50. Решите ребус: МАТЕ $\times$ М = АТИКА. (Как обычно, одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными – разные.)



Художник Инга Коржнева

КРУГ И ДЫРКА

ВЫРЕЖЬТЕ В ЛИСТЕ БУМАГИ ОТВЕРСТИЕ ДИАМЕТРОМ 8 СМ. А ТЕПЕРЬ ПРОСУНЬТЕ СКВОЗЬ НЕГО КОМПАКТ-ДИСК ДИАМЕТРОМ 12 СМ. БУМАГУ МОЖНО МЯТЬ, НО НЕЛЬЗЯ РВАТЬ. ДОГАДАЙТЕСЬ: КАК ТАКОЕ ВОЗМОЖНО?

Художник Tory Polska