Вот и завершился конкурс этого года, в следующем номере мы поздравим победителей. Но неужели этот номер останется без заданий? Мы решили напомнить несколько задач прошедшего конкурса, у которых есть интересное продолжение... Сначала мы приводим их условия (под старыми номерами), а потом и дополнительные вопросы – под теми же номерами, но с буквой «Д». Присылайте решения этих вопросов с пометкой «Конкурс – дополнительный тур» до 1 декабря. Итоги этого тура мы подведём отдельно. Удачи!

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ТУР

6. *Даны три целых числа. Ни одно из первых двух не делится на третье, а произведение первых двух делится на квадрат третьего числа. Может ли такое быть?*

Попробуйте разобраться в такой ситуации:

6-Д. а) Найдутся ли 5 разных натуральных чисел, ни одно из которых не квадрат целого числа, но произведение любых *двух* из них – квадрат целого числа?

б) Тот же вопрос, но требуется, чтобы произведение любых *трёх* из этих чисел было квадратом целого числа.

19. *Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например: «Верно ли, что этот человек – хитрец?»). Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, – и они знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?*

19-Д. А если перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто)? Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он!

22. *Дан лист клетчатой бумаги. Имея в наличии только линейку без делений и карандаш, нарисуйте на листе квадрат, площадь которого больше площади одной клетки: а) в 2 раза; б) в 5 раз.*

В решении этой задачи мы строили нужный квадрат, соединяя узлы клетчатой бумаги.

22-Д. А для каких целых чисел N найдётся квадрат с вершинами в узлах клетчатой бумаги, площадь которого больше площади клетки в N раз?

Ответ довольно неожиданный: число N должно представляться в виде суммы двух квадратов целых чисел. Например, в исходной задаче $2 = 1^2 + 1^2$, а $5 = 1^2 + 2^2$. Постройте искомый квадрат для $N = 10 = 1^2 + 3^2$ и $N = 13 = 2^2 + 3^2$ и попробуйте доказать общее утверждение.

Подсказка: вам поможет теорема Пифагора.

29. *Квантик попал на остров, населённый двумя племенами. Представители одного племени всегда говорят правду, представители другого – всегда лгут. Квантик подошёл к развилке дороги, и ему пришлось спросить у оказавшегося поблизости местного жителя, какая из двух дорог ведёт в деревню. Ему неизвестно, с представителем какого племени он разговаривает. Как, задав всего один вопрос, точно узнать, по какой дороге надо идти?*

29-Д. А если аборигены говорят на местном языке, в котором есть слова «пиш» и таш», означающие «да» и «нет»? Квантик знает этот язык, но забыл, что именно из «пиш» и таш» означает «да», а что – «нет». Как за один вопрос, ответом на который будет «да» или «нет» (вернее, «пиш» или «таш»), узнать, какая дорога ведёт в деревню?

45. *а) На плоскости дана точка. Нарисуйте на плоскости несколько кругов так, чтобы они не соприкасались ни с точкой, ни друг с другом, но* *«заслоняли» точку, то есть чтобы любой луч, выходящий из точки, упирался бы в один из кругов.*

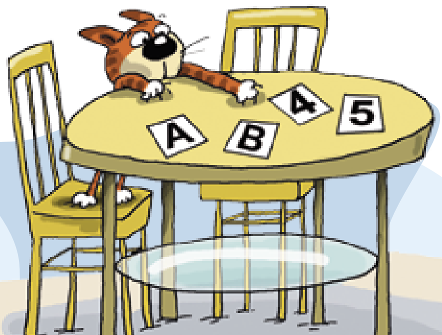
б) *Какое наименьшее число кругов для этого потребуется?*

Оказывается, хватит всего трёх кругов. А что, если поставить аналогичную задачу для пространства?

45-Д. В пространстве дана точечная лампочка, светящая во все стороны. Придумайте, как подобрать четыре непрозрачных шара и расположить их в пространстве, чтобы они не соприкасались ни друг с другом, ни с лампочкой, но полностью загораживали свет от неё (то есть чтобы любой луч, выходящий из лампочки, упирался бы в один из этих шаров)?

А вот ещё похожий по виду вопрос: можно ли заслонить точечную лампочку на плоскости *зеркальными* кругами? Лампочка светит во все стороны, но если её луч упирается в круг, то он отражается от круга (по закону «угол падения равен углу отражения»). Можно ли так расположить круги, чтобы ни один луч не ушёл за пределы кругов, а всё время отражался бы от них? Оказывается, эта задача до сих пор не решена! Более подробно об этом рассказано в мультфильме «Экранировать луч» на сайте «Математические этюды» (etudes.ru).

Напоследок приведём задачу, которая уже была в конкурсе этого года, но в другой формулировке:



??-Д. На столе лежат четыре карточки, как показано на рисунке. На каждой карточке с одной стороны – буква, а с другой – натуральное число. Какие карточки надо перевернуть, чтобы узнать, правда ли, что если на какой-то стороне карточки написано чётное число, то на другой стороне – гласная буква?

Решите эту задачу и догадайтесь, под каким номером в конкурсе она была.

Художник Николай Крутиков