УДИВИТЕЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ТАБЛИЦЕ ПИФАГОРА

Иван Масленников

Статья написана по мотивам курса на математическом отделении Летней экологической школы (ЛЭШ)

Все когда-то учились умножать (а кто-то, может, и сейчас учится) и наверняка видели таблицу Пифагора. В учебниках её часто рисуют размером 10×10, хотя можно продолжать таблицу до бесконечности.

На первый взгляд кажется, что в таблице Пифагора нет ничего интересного – число в строке умножается на число в столбце и результат пишется в соответствующую клетку. Стало быть, нетрудно догадаться, на сколько различаются соседние числа в каждом столбце или строке (ответ: на номер соответственно строки или столбца).

А что, если взять диагонали таблицы? Например, главную диагональ, идущую через клетки 1, 4, 9, 16... (на рисунке они закрашены жёлтым). Видно, что все числа на этой диагонали – квадраты. Оно и понятно, мы же умножаем номер строки на точно такой же номер столбца: $N\cdot N=N^2$. Таким образом, мы можем наперёд предсказать, что N-м числом на диагонали будет число N^2.

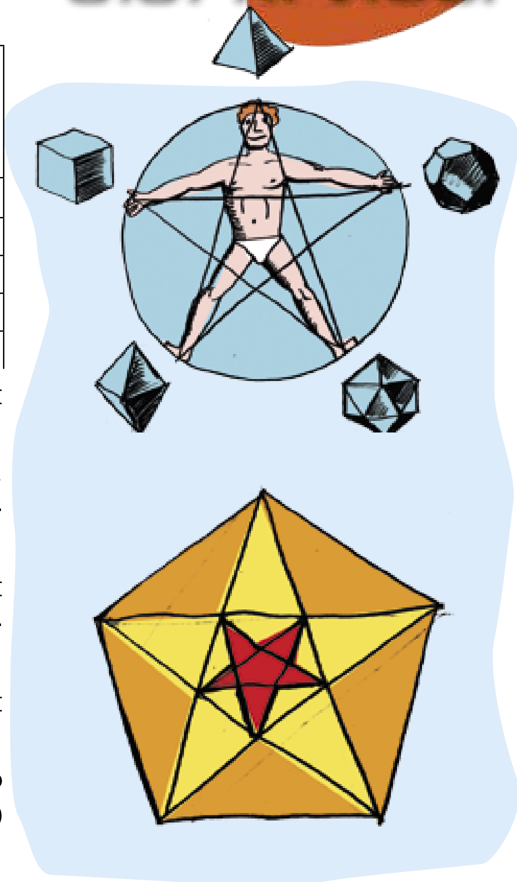
Числа на второй диагонали (соседней сверху к главной) выглядят более хитро: 2, 6, 12, 20, 30, ... (на рисунке они закрашены зелёным). Какой закономерности они подчиняются?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
2	4	6	8	10	12	14	16	18	…
3	6	9	12	15	18	21	24	27	…
4	8	12	16	20	24	28	32	36	…
5	10	15	20	25	30	35	40	45	…
6	12	18	24	30	36	42	48	54	…
7	14	21	28	35	42	49	56	63	…
8	16	24	32	40	48	56	64	72	…
9	18	27	36	45	54	63	72	81	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Из построения таблицы Пифагора ясно, что N-е число в этой последовательности равно $N\cdot(N+1)$, или

N^2+N. Иначе говоря, N-е число на второй диагонали больше N-го числа на главной диагонали ровно на N:

Номер N числа на главной диагонали	Число на главной диагонали (N^2)	Число на соседней сверху диагонали	Разность соседних чисел на диагоналях
1	1	2	1
2	4	6	2
3	9	12	3
4	16	20	4
...	...	...	...



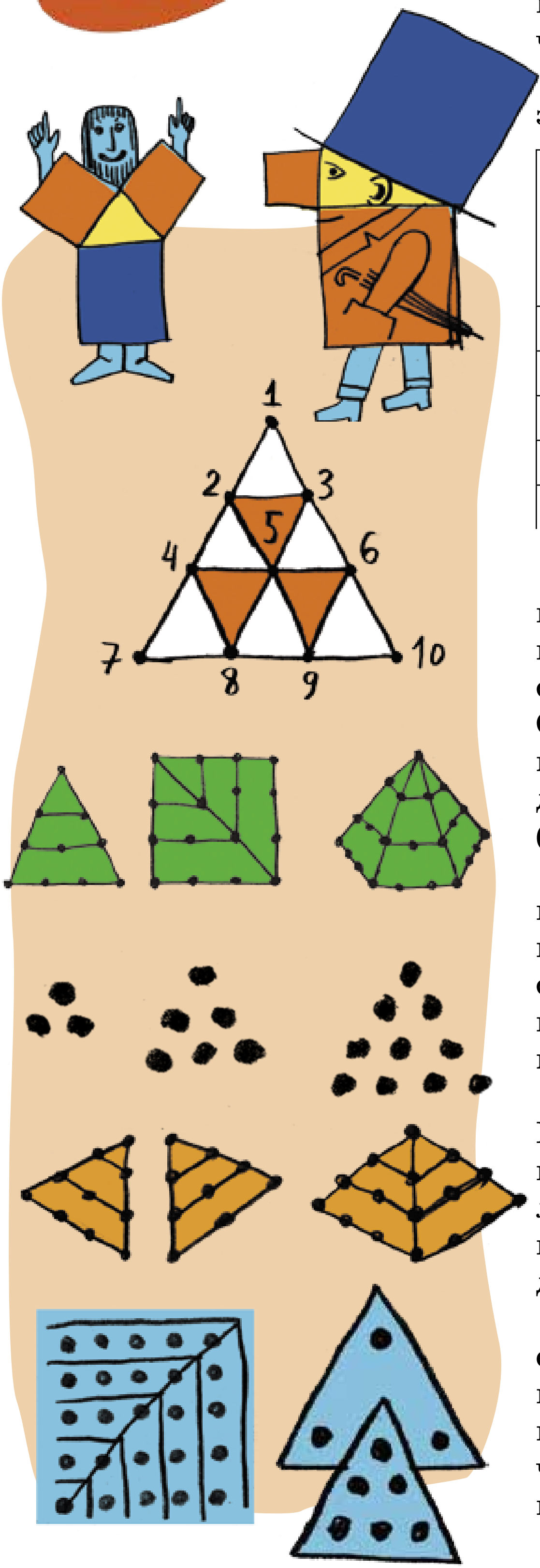
Оно и понятно – ведь такие два числа стоят в одной строке.

Числа на следующей (третьей) диагонали (3, 8, 15, 24, ...) что-то напоминают. Да это же квадраты, уменьшенные на единицу: $3=2^2-1$, $8=3^2-1$, $15=4^2-1$ и так далее!

Это нетрудно доказать. Ведь N-е число на третьей диагонали равно $N\cdot(N+2)$, то есть N^2+2N. Если прибавить 1, получится N^2+2N+1, а это как раз $(N+1)^2$. Вот и получается, что N-е число на третьей диагонали равно $(N+1)^2-1$.

А что, если взять диагональ, перпендикулярную главной? Например, проходящую через число 100 (на рисунке она закрашена синим).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	...
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	...
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	...
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	...
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	...
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	...
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	154	...
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	...
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	...
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...



Посмотрим на числа, которые лежат на этой диагонали справа сверху от 100 (они совпадают с теми, что лежат слева снизу): 99, 96, 91, 84...

Какая тут закономерность? Попробуем сравнить эти числа с сотней:

N – номер числа (ползём вправо вверх по диагонали от 100)	Самое большое число на диагонали	N-е число на диагонали	Разность самого большого и N-го числа на диагонали
1	100	99	1
2	100	96	4
3	100	91	9
4	100	84	16
...	...	...	...

Ого! Разности – это знакомые нам квадраты. Давайте подумаем, как же это вышло? Во-первых, вспомним, что сотня сама по себе квадрат: $100 = 10 \cdot 10$. От сотни мы двигаемся на каждом шаге вправо и вверх. Стало быть, номер строки уменьшается на один, а номер столбца увеличивается на один. И так на каждом шаге. Поэтому на N-м шаге мы получим число $(10 - N) \cdot (10 + N) = 100 - N^2$, как раз на N^2 меньше сотни.

Со всеми ли диагоналями это работает? Возьмём какое-нибудь другое число, например, 35. Проведём через него диагональ, перпендикулярную главной. Выберем самое большое число на диагонали (оно будет посередине) – 36. Посмотрим на разности между 36 и остальными числами на диагонали: 1, 4, 9, 16, ... Работает!

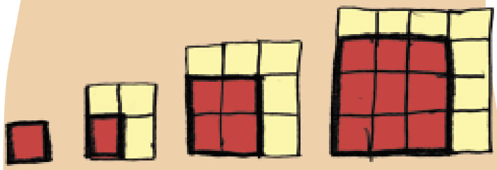
Хорошо. Возьмём ещё одно число, например, 50. Проведём через него диагональ, перпендикулярную главной. Выберем самое большое число на диагонали... Стоп! Да их там аж два: 56 и 56. Стоят рядышком, оба посередине, и ни одно из них не квадрат. Что делать в такой ситуации и как такое вообще вышло?

До этого нам попадались диагонали, у которых есть среднее число, оно же и самое большое – это диагонали, в которых нечётное число клеток. А вот у диагонали с чётным числом клеток посередине не одно число, а пара равных чисел. У нас сейчас именно такая диагональ.

А что, если всё-таки проделать для неё ту же операцию, что и с предыдущими диагоналями? Посмотрим на разность самого большого числа на диагонали (56) и следующих за ним чисел (движемся снова вправо и вверх):

N – номер числа (ползём вправо вверх по диагонали от 56)	Самое большое число на диагонали	N-е число на диагонали	Разность самого большого и N-го числа на диагонали
1	56	54	2
2	56	50	6
3	56	44	12
4	56	36	20
...	...	...	...

Ничего себе! Вы наверняка уже заметили, что это числа из зелёной диагонали первого рисунка. Догадались, почему?



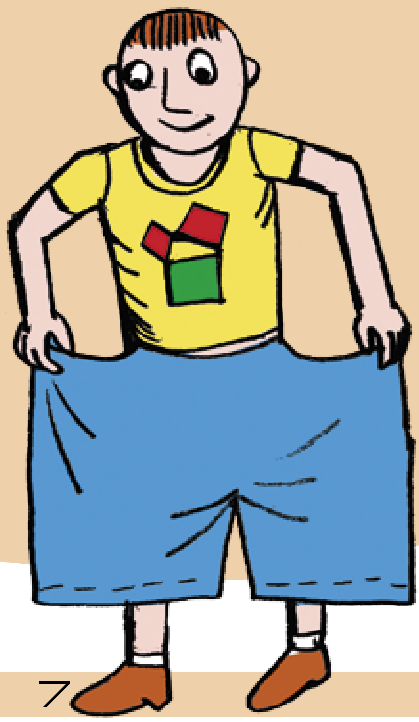
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1. Проведём в таблице Пифагора любую диагональ, перпендикулярную главной. Докажите, что числа на ней – это все возможные значения площади прямоугольника с целыми сторонами и определённым периметром. Чему равен этот периметр?

2. Возьмём число N на главной диагонали. Прибавим к нему все числа этой диагонали, стоящие слева сверху, и все числа перпендикулярной диагонали, проходящей через N, стоящие справа сверху (как на втором рисунке). Что получится?

3 (*Сергей Прика*). В таблице Пифагора выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причём каждая сторона рамки состоит из нечётного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета – жёлтый и зелёный. Докажите, что сумма всех чисел в жёлтых клетках равна сумме чисел в зелёных клетках.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
2	4	6	8	10	12	14	16	18	…
3	6	9	12	15	18	21	24	27	…
4	8	12	16	20	24	28	32	36	…
5	10	15	20	25	30	35	40	45	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…



Художник Артём Костюкевич