Игры и Головоломки

Сергей Лысенков

ШАХМАТЫ
С МНОЖЕСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ

За несколько тысяч лет существования шахмат люди так и не утратили интерес к этой игре. Многие учёные, писатели, деятели искусства и политики отдавали шахматам должное и даже черпали в них вдохновение.

Наверное, одна из причин такого неослабевающего интереса – это ощущаемое всеми равенство возможностей: итог игры зависит только от личных навыков и способностей участников. Играешь ли черными или белыми, это не даёт решительного преимущества.

В XX веке немецким математиком Эрнстом Цермело было доказано, что в шахматах должна существовать оптимальная стратегия, сводящая игру к одному из трёх результатов: выигрыш белых, выигрыш чёрных или ничья.* Но пока неизвестна ни сама эта стратегия, ни даже то, к какому из трёх возможных вариантов она должна привести. И пока перспективы окончательного «разрешения шахмат» представляются весьма туманными: даже современным компьютерам потребуется невообразимое время для решения этой задачи путём перебора вариантов. Так что, по-видимому, забвение шахматам не грозит.

Эрнст Цермело не искал ответ специально для шахмат: результат о существовании оптимальной стратегии следует из ныне носящей его имя теоремы теории игр. Но некоторые математики специально исследуют шахматы, решая экзотические задачи. Например: сколько возможно «конских туров»? «Конский тур» – это последовательность ходов, при которых конь посещает все клетки шахматной доски единожды. (Как было доказано в 1995 году, таковых последовательностей ходов ни много ни мало 33 439 123 484 294.)

Математики часто не удовлетворяются стандартными правилами, а выдумывают всякие модификации или просто не встречающиеся в игре ситуации: то многомерные шахматы, то несколько ферзей… Делается это зачастую забавы ради, однако полученные результаты могут оказаться полезными и в прикладных областях математики.

Математики Эмили Бергер и Александр Даббс из Массачусетского технологического института, одного из самых известных научных заведений мира,

*Читайте доказательство в статье «Простые шахматы» из «Квантика» № 2 за 2013 год.

решили изучить: а что будет, если за один ход делать несколько перемещений (то есть теперь ход как бы состоит из нескольких обычных шахматных ходов)? Фигуры двигаются по стандартным правилам на доске 8×8, белые начинают игру. И ещё одно изменение: если игрок объявил шах королю противника, причём у него в этом ходу ещё остались перемещения, то он может короля «съесть» и выиграть.

Бергер и Даббс назвали полученную серию игр (i,j)-шахматами, где белые за каждый ход делают i движений, а чёрные – j. Таким образом, привычная нам игра – это (1,1)-шахматы.

Оказалось, что интересных вариантов совсем немного. Для (2,2)-шахмат легко видеть, что выигрышной стратегии для чёрных нет. В самом деле, если бы она существовала, то белые, первым ходом пойдя конем с g1 на f3, а затем обратно с f3 на g1 вернулись бы к исходной позиции с ходом у соперника и дальше, пользуясь выигрышной стратегией для чёрных, победили бы. Значит, в (2,2)-шахматах либо белые всегда выигрывают, либо при правильной игре всегда получается ничья. Какой из этих случаев имеет место, Бергер и Даббс хотят выяснить с помощью компьютеров.

А для всех прочих случаев им удалось найти оптимальные стратегии.

Если белые за один ход совершают меньше движений, чем чёрные, но не больше трёх, то оптимальная стратегия приведёт к победе чёрных. Во всех остальных случаях «белые начинают и выигрывают». Вот как этот результат Бергер и Даббс выглядит в таблице.

Напомним, что i – это количество передвижений фигур за один ход для белых, а j – для чёрных. «Бел» означает, что оптимальная стратегия приводит к победе белых, «Чёр» – чёрных.

i \ j	1	2	3	$\geqslant 4$
1	?	Чёр	Чёр	Чёр
2	Бел	?	Чёр	Чёр
3	Бел	Бел	Бел	Чёр
$\geqslant 4$	Бел	Бел	Бел	Бел

Например, коню белых хватит четырёх передвижений, чтобы «съесть» неподвижного короля чёрных: поэтому если i не меньше четырёх, то белые выигрывают.

Попробуйте сами придумать стратегию (и доказать, что она работает) в случаях, когда (i, j) имеет вид:
а) $(i \leqslant 2, j \geqslant 4)$;
б) (3,1); в) (1,3);
г)* $(3, j \geqslant 4)$; д)* (2,1).

Художник Инга Коржнева