

ЦУДАК-ЧАСОВЩИК

(ПРОДОЛЖЕНИЕ СТАТЬИ «НОВЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПРОДОЛЖАЮТСЯ»)

– Федя, что это ты на меня так смотришь? Только не говори, что опять задачу про часы нашёл!

– Да, Даня, именно так и скажу. Нашёл! И такую заковыристую, что, боюсь, не одолеем. Вот послушай: *«Один чудаковатый часовщик смастерил странные часы. От полуночи до часу ночи они шли нормально, показывая верное время, но затем часовая стрелка начала идти со скоростью минутной, а минутная – со скоростью часовой. Через час стрелки вновь менялись скоростями, и так – каждый час. Укажите все моменты, когда часы показывают верное время»*.¹

– Ну, по крайней мере, с полуночи до часу ночи они уж точно покажут верное время!

– Об этом я и сам догадался. А потом-то что?

– Не знаю... Но вот что мне совсем не нравится, так это то, что здесь, похоже, мы одними полусутками, как было раньше, не обойдёмся. Вот посмотри. Минутная стрелка за первый час передвигается на полный оборот, за второй – на $\frac{1}{12}$ оборота, за третий – опять на полный оборот, и так далее. То есть за каждую пару часов минутная стрелка передвинется на $1\frac{1}{12}$ оборота. Полсутки – это 6 раз по 2 часа, и потому стрелка передвинется на $1\frac{1}{12} \cdot 6$, то есть шесть с половиной оборотов, и в результате будет показывать вертикально вниз! То же самое, конечно, будет и с часовой стрелкой – через половину суток она тоже сдвинется на шесть с половиной оборотов. Правда, за следующие полсутки обе стрелки восстановят вертикальное положение.

– Значит, надо рассматривать интервал в целые сутки, то есть 24 часа. Притом отдельно рассматривать чётные и нечётные часы...

– Эврика! Нечётные часы рассматривать не надо!

– Почему?

– Ну смотри. В начале самого первого часа исходное положение стрелок верное (00:00), и идут они с *правильными* скоростями. А дальше за каждую пару часов и часовая, и минутная стрелки передвинутся на $1\frac{1}{12}$ оборота, то есть займут заведомо *неверное*



¹Автор задачи – Анатолий Павлович Савин (1932–1998), один из создателей журнала «Квант», организатор первых турниров «Математика 6–8».

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

исходное положение. По крайней мере, минутная – это точно; ведь правильное её положение в начале каждого часа должно быть вертикально вверх! Получается, что в течение каждого нечётного часа (за исключением самого первого) стрелки идут с *правильными* скоростями, но из *неправильных* стартовых позиций. Конечно, они не смогут показать верное время!

– Логично. Но для чётных часов такое рассуждение не проходит...

– Верно, не проходит. Там и скорости неверные, и исходные положения. И потому минус на минус может дать плюс.

– Точно! Если скорости неверные, то за чётный час минутная стрелка совпадёт с минутной стрелкой на правильных часах один раз.

– Это ещё почему?

– Мы ведь уже поняли, что через каждый час наша минутная стрелка будет на каком-то часовом делении. Пусть она в начале чётного часа будет на делении k . Правильная минутная в этот момент – вверху циферблата. За этот чётный час правильная минутная пройдёт целый оборот и совпадёт с неправильной где-то между k и следующим часовым делением. То же самое для часовых стрелок!

– Ловко ты придумал, Федя! Но загвоздка в том, что они должны совпасть в один и тот же момент времени. А мне что-то не верится.

– Так давай проверим! За первые $2n$ часов, то есть к концу чётного часа, каждая стрелка прошла n раз по $1\frac{1}{12}$ оборота – это $n + \frac{n}{12}$ оборотов, и значит, обе стрелки сейчас уехали вперёд от верха циферблата на $\frac{n}{12}$ оборота. А правильная минутная и часовая стрелки прошли соответственно $2n$ и $\frac{2n}{12}$ оборотов, то есть правильная минутная – вверху циферблата, а правильная часовая – на $\frac{2n}{12}$ оборота впереди. Смотри, наша минутная стрелка на $\frac{n}{12}$ оборота обогнала правильную минутную, а наша часовая на те же $\frac{n}{12}$ оборота отстала от правильной часовой.

– Да, вижу! Выходит, к концу чётного часа минутные стрелки разъехались на такое же расстояние, что и часовые. Но движется пара минутных стрелок «так же», как и пара часовых (скорости быстрых стрелок



ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ



Художник Евгений Паненко

одинаковы, и скорости медленных – тоже)! Значит, если за этот чётный час минутные стрелки один раз совпали, то и часовые совпали единожды – в тот же самый момент. Вот и получается, что за каждый чётный час наши часы покажут правильное время ровно один раз!

– Рано радуешься, Даня! Напоминаю, что нам нужно найти, когда именно они покажут правильное время.

– Ой, это же считать надо...

– Ничего-ничего! Через $2n$ часов после полуночи правильная минутная стрелка отстаёт от неправильной на $\frac{n}{12}$ оборотов. Пусть они встретились за x минут до этого. Правильная минутная стрелка за x минут сделала $\frac{x}{60}$ оборотов, неправильная – в 12 раз меньше, то есть $\frac{x}{12 \cdot 60}$ оборотов. Получаем, что $1 - \frac{n}{12} = \frac{x}{60} - \frac{x}{12 \cdot 60}$, откуда $x = (12 - n) \cdot \frac{60}{11}$, где n – целое число, лежащее в пределах... э-э-э... от 1 до 12.

– Ну, раз так, то всё предельно ясно. Как видно, при максимальном $n = 12$ получаем $x = 0$, что неинтересно: это полночь, а с первым часом мы уже разобрались. При $n = 1$ получаем $x = 60$, что тоже интереса не представляет: это самое начало второго часа, оно же – конец первого часа, с которым мы также разобрались. Для остальных же n от 2 до 11 включительно получаем 10 ответов: 3 часа $\frac{60}{11}$ минут, 5 часов $\frac{120}{11}$ минут, и так далее вплоть до 21 часа $\frac{600}{11}$ минут. Итого получаем часовой интервал плюс десять «точечных» значений.

– Слушай, пока мы тут решали, у меня возникла идея о немного других тоже чудаковатых часах: пусть они идут верно от полуночи до *первого совпадения стрелок*, а в момент совпадения меняются скоростями. При втором совпадении они опять меняются скоростями, и так далее при каждом совпадении. Вопрос тот же: найти все моменты, когда часы показывают верное время.

– Нет уж, давай отложим это дело на другой раз. Всё-таки сильно меня выматывают такие задачи. Уже и во сне кроме стрелок ничего не вижу.

Обращение к читателям. Давайте не будем откладывать. Попробуйте решить предложенную задачу для модифицированных чудаковатых часов. А потом сверьте свой ответ с приведённым на стр. 30.