Александр Блинков,
Сергей Дориченко,
Максим Прасолов

УГОЛ В КВАДРАТЕ

Можно ли доказать математическую теорему или обнаружить новый факт, просто перегибая лист бумаги? Оказывается, да!

ЭКСПЕРИМЕНТ

Возьмите в руки бумажный квадрат и склейте две его соседние стороны, получив что-то вроде кулька (рис. 1; советы по изготовлению – внизу страницы).

Положите кулёк на стол и аккуратно прижмите рукой (сплющите). Что получилось?

Понять ответ можно и по-другому, не склеивая кулька: положите на стол бумажный квадрат и загните один из его углов, как показано на рисунке 2.

Теперь загните второй угол так, чтобы две из сторон квадрата совместились (рис. 3).

Это и есть наш сплющенный кулёк!

Чтобы удобнее было вести дальнейший разговор, мы отметили на рисунке 3 несколько точек.

Заметили, что точки M, E и N лежат на одной прямой? Так получается потому, что каждый угол квадрата равен 90° – состыковавшись, два таких угла образуют развёрнутый угол.

А чему равен угол MAN? Конечно, половине угла квадрата – сейчас угол MAN «двухслойный», а если отогнуть обратно загнутые части, мы получим угол квадрата. То есть угол MAN равен 45°.

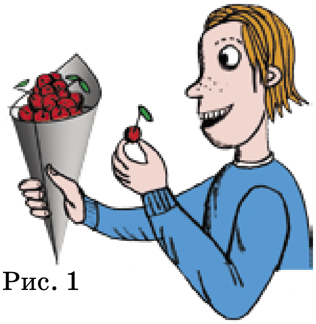


Рис. 1

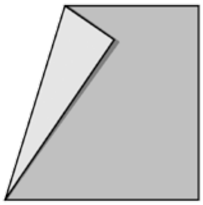


Рис. 2

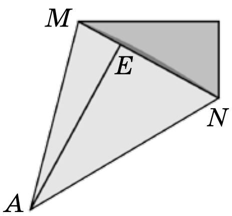
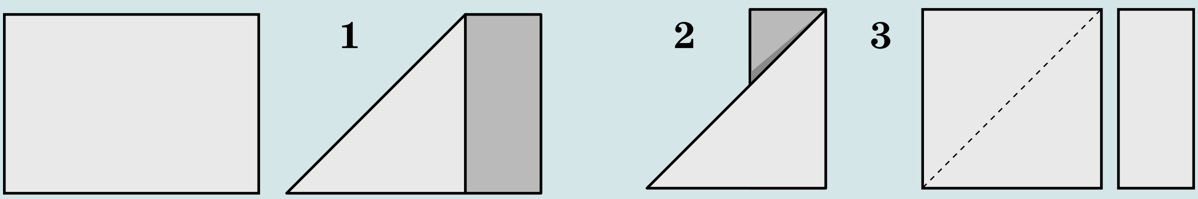


Рис. 3

В ПОМОЩЬ ЭКСПЕРИМЕНТАТОРУ

Как вырезать квадрат из прямоугольного листа бумаги



1. Перегните лист, наложив одну из его сторон на соседнюю, и прогладьте рукой. У вас получится фигура в виде треугольника, к которому примыкает прямоугольник.

2. Отогните этот прямоугольник, снова прогладьте лист рукой, а затем аккуратно оторвите прямоугольник по линии сгиба.

3. Расправьте лист – у вас в руках окажется квадрат.

ПОЖИНАЕМ ПЛОДЫ

А теперь применим сделанные нами наблюдения для решения нескольких красивых задач. Все они начинаются с одного и того же условия (мы не будем его повторять):

На сторонах квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N так, что угол MAN равен 45° (рис. 4).

Такая у нас везде будет исходная картинка. А докажем мы про неё много интересных утверждений.

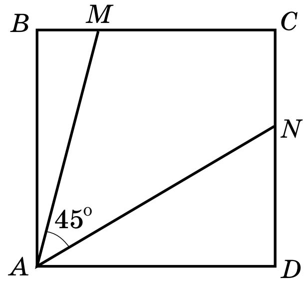


Рис. 4

1. *Периметр треугольника MCN равен половине периметра квадрата $ABCD$.*

Начало решения напрашивается: перегнём квадрат по отрезкам AM и AN (рис. 5).

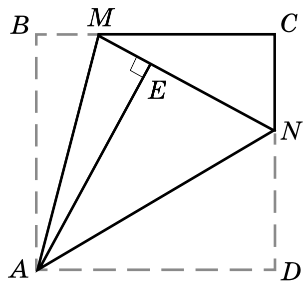


Рис. 5

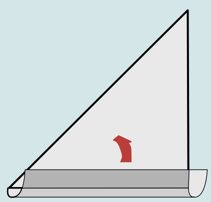
Из предыдущего ясно, что при этом стороны AB и AD совместятся, а кусочки BM и DN состыкуются (в точке E), превратившись в сторону MN. Получается, что две стороны квадрата (CB и CD), перегнувшись в точках M и N, превратились в треугольник CMN, что и требовалось!

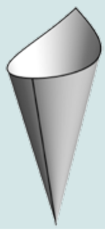
2. *Расстояние от вершины A до прямой MN равно стороне квадрата.*

Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. В нашем случае искомый перпендикуляр – это AE, и он такой же длины, как и сторона квадрата.

Как склеить кулёк из квадрата

Перегните полученный квадрат по диагонали и склейте скотчем совместившиеся стороны квадрата (наклейте полоску скотча на одну сторону, переверните согнутый квадрат и закончите склейку, перегнув полоску скотча). Расправьте то, что получилось, и у вас в руках окажется кулёк, с которого мы начали статью.





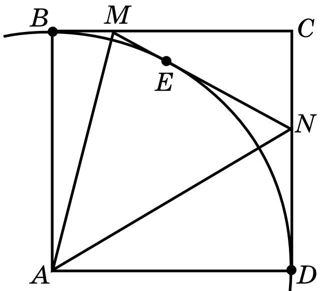


Рис. 6

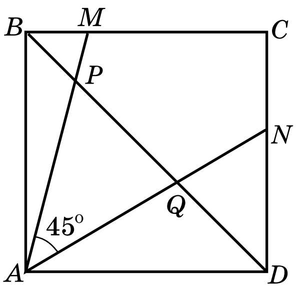


Рис. 7

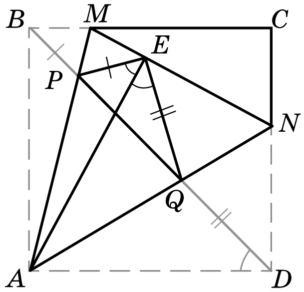


Рис. 8

3. *Окружность с центром A и радиусом, равным стороне квадрата, касается стороны MN и продолжений сторон CM и CN треугольника MCN (рис.* 6*).*

Окружность касается прямой, если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности. Поэтому эта задача сразу следует из предыдущей: точками касания будут *B*, *E* и *D*.

Проведём на рисунке 4 дополнительную линию – диагональ *BD* квадрата (рис. 7).

4. *Пусть диагональ BD квадрата пересекает отрезки AM и AN в точках P и Q (рис.* 7*). Тогда из отрезков BP, PQ и DQ можно составить прямоугольный треугольник с прямым углом напротив отрезка PQ.*

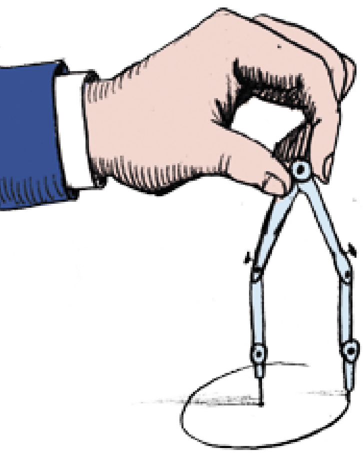
При перегибании квадрата по отрезкам *AM* и *AN* отрезок *BP* займёт положение отрезка *EP*, а отрезок *DQ* – положение отрезка *EQ* (рис. 8). Углы *ABP* и *ADQ* равны по 45°, а после перегибания они вместе составят угол *PEQ* – значит, он прямой! Мы получили прямоугольный треугольник *PEQ* с прямым углом напротив *PQ*.

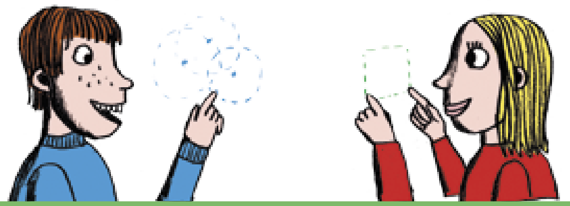
Упражнение 1. *Докажите обратные утверждения: если точки M и N выбраны на сторонах квадрата так, что выполняется одно из условий* 1–4, *то угол MAN равен* 45°.

Упражнение 2. *Угол PCQ равен* 45°.

Рассмотренную нами геометрическую картинку придумал замечательный математик Вячеслав Викторович Произволов (она встречается в нескольких его задачах). Кстати, если вы ещё не знакомы с его книгой «Задачи на вырост» – советуем прочитать.

На этом можно было бы остановиться – но в нашей картинке спрятано ещё столько фактов! Правда, они уже посложнее и требуют больше знаний. Если вы готовы бороться с трудностями (самостоятельно или с помощью учителей и друзей), – читайте дальше.





ПРОДОЛЖЕНИЕ ДЛЯ САМЫХ НАСТОЙЧИВЫХ

Знаете ли вы, что окружность из задачи 3 называется ***вневписанной*** для треугольника MCN? Это потому, что она *касается стороны и продолжений двух других сторон этого треугольника*. У каждого треугольника есть три вневписанные окружности (рис. 9).

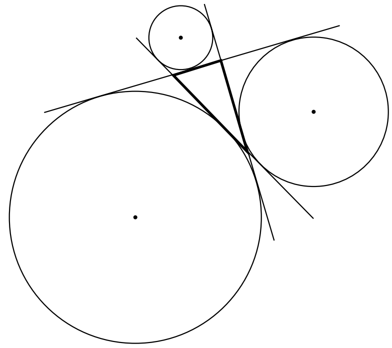


Рис. 9

Упражнение 3. *Докажите, что точка A – центр вневписанной окружности треугольника PEQ (рис. 8).*

5. *Точки M и N – центры двух вневписанных окружностей треугольника PEQ (рис. 8).*

Докажем свойство, например, для точки N (рис. 10). Заметим, что расстояния от точки N до прямых EQ и QD равны – ведь эти прямые переходят друг в друга при перегибании по прямой AN. Заодно ясно, что угол QEN тоже равен 45°. Получается, что EN делит угол между отрезком QE и продолжением отрезка PE пополам – ведь этот угол прямой (так как равен прямому углу PEQ). Но тогда если перегнуть квадрат по EN, то прямая EQ перейдёт в прямую PE.

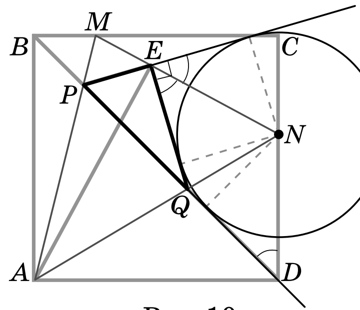


Рис. 10

Значит, расстояния от точки N до сторон треугольника PEQ одинаковы, и N – центр его вневписанной окружности.

6. *Углы APN и AQM – прямые.*

Докажем свойство, например, для угла APN (рис. 11).

Поскольку вневписанная окружность с центром в N касается продолжений сторон PE и PQ, при перегибании по отрезку PN прямые PE и PQ совместятся. Это значит, что углы NPQ и NPE равны. Но углы APQ и MPE тоже равны (поскольку APQ и BPM равны как вертикальные, а также BPM и EPM равны). Тогда равны углы APN и MPN, а в сумме они составляют развёрнутый угол. Значит, оба они равны по 90°.

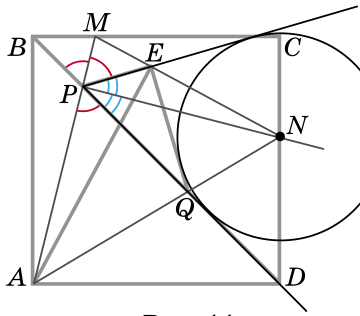


Рис. 11

Упражнение 4. *Докажите, что $AQ = MQ$ и $AP = NP$.*

Чтобы двигаться дальше, надо хорошо владеть программой по геометрии для 8 класса. Например, если вы уже знаете, что высоты любого треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке, то справитесь и с таким упражнением:

Упражнение 5. *Докажите, что прямые MQ, NP и AE пересекаются в одной точке.*

Напоследок вот ещё три утверждения про нашу картинку – докажите их, когда овладеете необходимыми знаниями.

7. *Вокруг четырёхугольника $ABMQ$ можно описать окружность, и её центр попадёт в середину отрезка AM.*

8. *Площадь треугольника PAQ в два раза меньше площади треугольника MAN.*

9. *Центр окружности, описанной около треугольника MAN, лежит на отрезке AC.*

Художник Артём Костюкевич