НАШ КОНКУРС («Квантик» № 5)

21. *На обложке одного из современных журналов напечатали рекламу:*

«Возьмите число из двух последних цифр своего телефона, умножьте на 2, прибавьте 3, умножьте на 4, вычтите 12 и разделите на исходное число. Тот, у кого получилось 8, может получить 2300000 рублей!»

Оцените, велика ли вероятность попасть в число счастливчиков, которые, согласно рекламе, могут получить заветные 2300000 рублей.

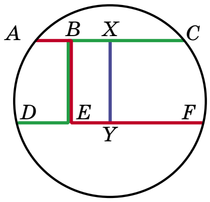
Решение. Пусть две последние цифры номера телефона образуют число n. Тогда, последовательно выполняя указанные действия, получаем следующие результаты:

$$2n,\ 2n+3,\ 8n+12,\ 8n,\ 8$$

Как видим, наши шансы *абсолютны*! Любое исходное число приводит к желанной восьмёрке, и остаётся только плясать от счастья. Пока… не прочтём подписанные снизу мелкими буквами условия рекламной акции. А там написано, что участник акции получает совсем не деньги, а каталог товаров и, купив что-либо из предложенного там, становится участником лотереи, в которой и разыгрывается названная сумма. Итак, мы лишний раз убедились, что чудес не бывает.

Интересно, что здесь есть тонкость: вероятность получить в итоге восьмёрку всё-таки не равна 100%. Почему? А потому, что те, у кого номер телефона оканчивается двумя нулями (и, стало быть, $n=0$), на последнем шаге вынуждены будут делить на 0, что не допускается. Поэтому вероятность стать участником акции снижается примерно до 99% (ибо среди телефонных номеров, как нетрудно сообразить, приблизительно сотая часть оканчивается двумя нулями).

22. *В круглом парке проложены две параллельные дорожки, соединённые перпендикулярной им перемычкой, как показано на рисунке. Один пешеход прошёл по маршруту ABEF, а второй – по маршруту CBED. Чей путь был длиннее?*



Отметим середины дорожек AC и DF буквами X и Y. Так как окружность симметрична, отрезок XY будет перпендикулярен параллельным дорожкам AC и DF. Значит, $BE = XY$, а также зелёный отрезок BX и красный отрезок EY равны по длине. Поэтому, если мы заменим маршрут первого на $AXYF$, длина пути первого не изменится. Аналогично, не изменится длина пути второго, если мы заменим его маршрут на $CXYD$. Но длины маршрутов $AXYF$ и $CXYD$, очевидно, равны: оба маршрута состоят из половины DF, половины AC и ещё расстояния XY.

23. *Найдутся ли такие 10 натуральных чисел, что ровно одно из них делится на 10, ровно два делятся на 9, ровно три делятся на 8, ровно четыре делятся на 7, ровно пять делятся на 6, ровно шесть делятся на 5, ровно семь делятся на 4, ровно восемь делятся на 3, ровно девять делятся на 2 и ровно десять делятся на 1?*

Ответ: нет.

Если бы такие десять чисел нашлись, то среди них девять делились бы на 2 и восемь делились бы на 3. Но тогда как минимум семь чисел делились бы и на 2, и на 3, а значит, и на 6. Это противоречит условию – чисел, делящихся на 6, должно быть ровно 5.

24. *Есть 18 камешков, причем известно, что любые два камешка различаются по весу. Как за 25 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь найти самый тяжёлый и самый лёгкий камешки?*

Разделим камни на девять пар и за девять взвешиваний сравним камни в каждой паре. Камни, которые перевесили, назовём «крупными», а остальные – «мелкими».

Ясно, что самый тяжёлый камень находится среди девяти «крупных». Найти его можно за 8 взвешиваний – берём любой «крупный» камень и сравниваем его по очереди с остальными «крупными»; как только натыкаемся на более тяжёлый камень – берём его и продолжаем сравнивать с оставшимися «крупными», и так далее, пока не дойдём до конца. В итоге у нас останется камень, который перевесил всех «крупных», – он и будет самый тяжёлый.

Аналогично, самый лёгкий камень находится среди «мелких», и его мы тоже найдём за 8 взвешиваний.

Итого будет потрачено $9 + 8 + 8 = 25$ взвешиваний.

25. *Имеются четыре одинаковые монеты. Используя только их, выложите на столе три монеты в ряд так, чтобы соседние монеты касались, а центры монет были на одной прямой.*

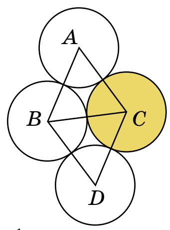


Рис. 1

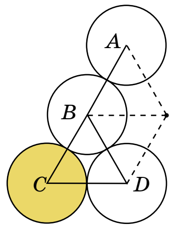
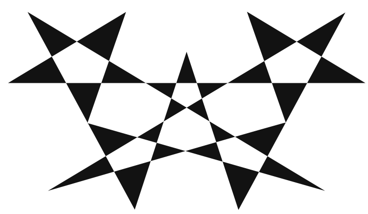


Рис. 2

Положим три монеты вплотную друг к другу, приложим к двум из них ещё одну и получим «ромбик» – центры монет образуют два равносторонних треугольника с общей стороной (рис. 1). Теперь уберём монету C и приложим её к монетам B и D (рис. 2). Тогда центры монет A, B и C будут лежать на одной прямой – так получается потому, что три угла равносторонних треугольников в сумме дают развёрнутый угол.

ПЯТЬ ЗВЁЗДОЧЕК («Квантик» № 6)

Можно обойтись всего 13-ю отрезками:



МАШИНЫ НА ТРОТУАРЕ («Квантик» № 6)

Машины наклонены на один и тот же угол. Действительно, задние колёса машин находятся на одном уровне, и передние тоже. А угол наклона зависит только от разницы высоты передних и задних колёс.

Машины не будут скатываться. Действительно, если машина чуть-чуть сдвинется вперёд или назад, то все колёса останутся на той же высоте, что и были. Другими словами, машина останется на одной высоте, а значит, скатываться она не будет.

В ОГОРОДЕ БУЗИНА…

1. Если номер «Мерседеса» 777, а «Жигулей» – 597, то есть два варианта получить эти номера способом первого математика: $777=575+202$ и $597=575+22$, или же $777=585+192$ и $597=585+12$. В первом варианте мы вычеркнули 0, а во втором – 9. То есть по номерам машин нельзя определить вычеркнутую цифру.

2. Пусть книга содержит N страниц. Как определить $S(N)$ – сумму их цифр? Воспользуемся тем, что требуемая нам сумма цифр должна давать номер года, принадлежащий либо нашему столетию, либо концу предыдущего. Сначала для пробы найдём сумму цифр всех однозначных чисел: $S(9)=1+2+\ldots+9=45$. Да, маловато. Добавим к ним двузначные, то есть определим $S(99)$. Как это сделать? Среди цифр единиц всех чисел от 1 до 99 эта же сумма $1+2+\ldots+9$ повторяется 10 раз. А среди цифр десятков сначала 10 раз повторяется цифра 1, затем 10 раз – цифра 2, и так далее до 9, что эквивалентно десятикратному появлению той же суммы $1+2+\ldots+9$. Итак, $S(99)=20\cdot(1+2+\ldots+9)=$ $=20\cdot 45=900$.

Как видим, первая сотня дала почти половину требуемого номера года. Добавим к ней вторую сотню и найдём $S(199)$. Числа от 100 до 199 получаются из чисел от 00 до 99 приписыванием слева цифры 1, которая встретится, таким образом, 100 раз. Поэтому $S(199)=S(99)+100\cdot 1+S(99)=900+100+900=1900$.

Мы сразу оказались в начале XX века! А теперь учтём, что каждый лист – это две страницы, поэтому каждая книга имеет чётное число страниц. Далее считаем вручную: $S(200)=1902$; $S(202)=1909$; $S(204)=1920$; $S(206)=1935$; $S(208)=1954$; $S(210)=1968$; $S(212)=$ $=1977$; $S(214)=1990$; $S(216)=2007$; $S(218)=2028$.

Последнее значение «выскакивает» в будущее, поэтому подсчет можно прекратить. Видно, что из всех выписанных чисел лишь 2007 год рождения подходит для возраста ученика школы (ему в нынешнем 2015 году исполняется 8 лет). И если это – старший брат Витя, то год рождения младшего брата Мити просто не существует (ибо 2028 год ещё не наступил)! Поэтому в школу ходит младший брат Митя, родившийся в 2007 году. А вот год рождения Вити определить невозможно, но это и не т ребуется.

Упоминание о школе с математическим уклоном – существенно. Кое-где ещё сохранились, например, вечерние школы или школы рабочей молодежи, где возраст учеников не так жёстко ограничен.

ЩЕЛКУНЧИК

Выдумана история №3. Шахматный конь ходит буквой Г и не может объявить шах королю, стоя на соседней с ним клетке.

КТО С КЕМ ТАНЦУЕТ

Ответ: Артур танцует с Мэри, Генри – с Кэти, Джон – с Розой.

По словам Мэри, каждая девушка моложе своего партнёра на 3 года. Значит, чем моложе девушка, тем моложе её партнёр, а ещё сумма возрастов в каждой паре нечётная.

Из реплик Кэти и Артура видно, что Кэти не может танцевать ни с Джоном, ни с Артуром, потому что иначе сумма возрастов Кэти и её партнёра была бы чётной (либо 36, либо 40). Поэтому Кэти танцует с Генри.

Роза – самая молодая, а тогда её партнёр – самый молодой среди танцоров-мужчин. Поскольку сумма возрастов Кэти и Артура – 40, а Кэти и Джона – 36, то Джон младше Артура (на 4 года). Выходит, Джон – партнёр Розы.

Мы не нашли пару только Артуру и Мэри, поэтому они танцуют вместе.

ИГРЫ В СЛОВА С ПЕРЕВОРАЧИВАНИЕМ

Фраза, которую произносит Гоша: «Мама, привет! Получил двойку за контрольную, но завтра перепишу».

№ 1: *пик – бег, зато – сода, вид – Фет, ага – око.*

Ответ к задаче, описанной в игре № 1: «*Жил-был у бабушки серенький козлик, вот как, вот как, серенький козлик*».

№ 2: *Адам – дама, раба – араб, орк – рок, вина – Иван, ОМОН – моно.*

№ 3: *По три носка на рейке. – Потри нос канарейке.*

Полетела набойка, Валерия! – Полетела на бой кавалерия!

Акула, кит около Тили. – А кулаки-то колотили

Вобла кеды рада померить – нечем. – В облаке дыра, да померить нечем.

Котлетами не вели кидать, нечего. – Кот летами невелик, и дать нечего.

Вариантов для окончания фразы «Покажите лису дятлу» много, требуется только ввести ещё одно действующее лицо или предмет на «*лу-*». Мы выбрали лунатика: *Пока жители судят – лунатик оглядывается. Покажите лису дятлу: на тик оглядывается.*

ТРАГЕДИЯ ПРЕДАТЕЛЯ

Пусть у Плохиша было $Б$ банок варенья и $К$ коробок печенья. Если он съедает в день 3 банки варенья и 1 коробку печенья, то варенья ему хватит на $[Б/3]$ дней (здесь и далее квадратные скобки обозначают целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее значения, заключенного в эти скобки). Печенья же хватит на $К$ дней.

Если Плохиш съедает в день 2 банки варенья и 2 коробки печенья, то варенья ему хватит на $[Б/2]$ дней, а печенья – на $[К/2]$ дней.

По условию, меньшее из чисел $[Б/3]$ и $К$ равно 21, а также меньшее из чисел $[Б/2]$ и $[К/2]$ равно 21. Получаем четыре теоретически возможных варианта:

1) $[Б/3]=[Б/2]=21$, 2) $К=[К/2]=21$,
3) $К=[Б/2]=21$ 4) $[Б/3]=[К/2]=21$.

Первые два варианта, очевидно, не подходят. В третьем варианте, поскольку $К=21$, то $[К/2]<21$, что невозможно (все числа не меньше 21).

Остаётся только четвёртый вариант. Тогда $Б=63$, 64 или 65, а $К=42$ или 43. Однако у Плохиша отобрали половину банок и коробок. Значит, $К$ и $Б$ – чётные! Поэтому $Б=64$ и $К=42$, а после конфискации осталось 32 банки и 21 коробка.