ЧАСОВАЯ МЕДИАНА

Игорь Акулич

– Даня! Как говорят в Одессе, ты сейчас будешь дико смеяться. Знаешь, почему?

– Догадываюсь, Федя. Небось, опять задачу про часы нашёл.

– Верно... Твоя интуиция поразительна!

– Скорее, опыт. Ты ведь кроме этого, ни о чем думать не можешь. Ладно, что за задача-то?

– Она как бы про часы, но изрядно отличается от тех, что мы раньше решали, потому что *выходит за пределы циферблата*. Вот послушай: «На столе както лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов (часы считаются идеально плоскими)»[1].

– Ну и как, решил ты её?

– Честно признаюсь, не совсем. То есть подсмотрел в ответы. Оказывается, ключ к её решению – *медиана*!

– Что ещё за медиана? Откуда она в часах взялась-то?

– Сейчас узнаешь. Оказывается, решение основано на известной геометрической теореме: удвоенная медиана, проведённая из любой вершины треугольника, меньше суммы двух сторон треугольника, сходящихся в этой вершине.

– Что-то мне эта теорема неизвестна. И вообще она какая-то сомнительная. Конечно, если треугольник, допустим, правильный, то у него любая медиана меньше любой стороны, и потому теорема верна. Если же он прямоугольный или тупоугольный, и медиана проводится из вершины острого угла – то там ещё вопрос, что больше! Вот посмотри: медиана AM треугольника ABC, конечно, меньше стороны AB, но больше стороны AC (рис.1). И в сумме стороны AB и AC могут оказаться и меньше *удвоенной* медианы...

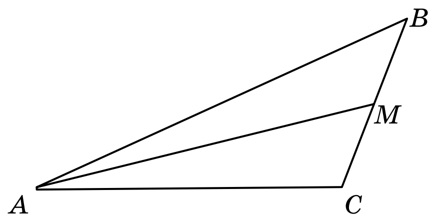

Рис. 1

[1] Эта задача была предложена на X Всесоюзной математической олимпиаде в 1976 году. Автор, к сожалению, неизвестен.

– А вот и нет! Погляди-ка сюда. Давай *достроим* твой треугольник ABC до *параллелограмма* $ABDC$ так, чтобы сторона BC оказалась диагональю этого параллелограмма (рис.2). Тогда AD – вторая его диагональ, и она как раз равна удвоенной медиане AM треугольника ABC. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $BD = AC$, и сумма сторон $AB + AC$ равна сумме $AB + BD$. Но ведь очевидно, что $AB + BD$ больше, чем AD, поскольку в треугольнике ABD (как, впрочем, и вообще в любом треугольнике) сумма двух сторон всегда больше третьей. Теорема доказана!

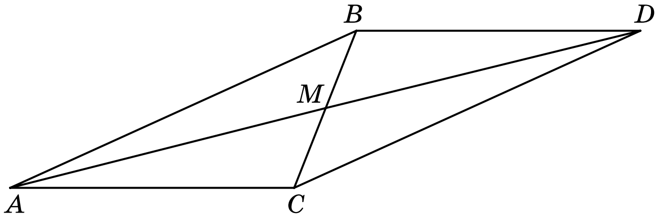

Рис. 2

– Да, теперь согласен. Но при чём здесь часы?

– Слушай дальше. Пусть точка A – тот самый *центр стола*, а точки M_1, M_2, M_3, ..., M_{50} – центры всех часов, пронумерованные в произвольном порядке. Возьмём любой момент времени, и пусть концы минутных стрелок часов находятся в точках B_1, B_2, B_3, ..., B_{50} соответственно. Тогда ровно через полчаса все минутные стрелки продвинутся ровно на пол-оборота, и их концы окажутся в точках C_1, C_2, C_3, ..., C_{50}, которые симметричны точкам B_1, B_2, B_3, ..., B_{50} относительно центров часов. То есть для каждых часов мы получим картинку, похожую на рисунок 1, только на рисунке номера не расставлены и углы со сторонами могут быть другими. Поэтому в силу только что доказанной теоремы $AB_1 + AC_1 > 2AM_1$, $AB_2 + AC_2 > 2AM_2$ и так далее вплоть до $AB_{50} + AC_{50} > 2AM_{50}$.

– Минуточку! Дальше всё ясно! Надо сложить все эти неравенства, верно? И получим:

$$(AB_1 + AC_1) + (AB_2 + AC_2) + \ldots + (AB_{50} + AC_{50}) >$$
$$> 2(AM_1 + AM_2 + \ldots + AM_{50}).$$

Теперь в левой части сгруппируем слагаемые в другом порядке, то есть:

$$(AB_1+AB_2+\ldots+AB_{50})+(AC_1+AC_2+\ldots+AC_{50})>$$
$$>2(AM_1+AM_2+\ldots+AM_{50}).$$

Выражение в первых скобках левой части – это сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок в выбранный нами произвольный момент времени, а в правых скобках – сумма тех же расстояний через полчаса. Ясно, что хотя бы одна из этих двух сумм обязана быть больше, чем сумма в скобках правой части – иначе левая часть будет *не больше* правой. Вот тогда-то сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок и окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов. Теорема доказана!

– А ты заметил, что часы не обязаны лежать на столе, а могут вообще-то располагаться где попало и как попало?

– Конечно! Более того – и точка, от которой измеряются все расстояния, тоже может находиться где угодно: хоть в центре стола, хоть на верхушке Останкинской телебашни!

– И ещё: вместо минутных стрелок могут фигурировать секундные или часовые! Рассуждения те же, только рассмотренный интервал времени будет не полчаса, а 30 секунд либо же 6 часов – чтобы стрелка прошла пол-оборота.

– Да и количество часов может быть любым, а не только 50. Красивая задача!

– А теперь вот тебе сюрприз: я эту задачу *троекратно усилил*.

– Это как?

– Я доказал, что существует момент времени, когда и сумма расстояний от произвольной точки до концов секундных стрелок, и сумма расстояний от неё до концов минутных стрелок, и сумма расстояний до концов часовых стрелок – то есть *каждая* из трёх сумм! – больше суммы расстояний до центров часов! Как тебе это нравится?

– Нет, но это уж чересчур... Стрелки-то «увязаны» между собой, и если одна сдвинется, то остальные две тоже, но на другие углы. Так что здесь я не уверен.

– Опять сомневаешься? Зря! Смотри: в силу доказанного нами в некоторый момент времени сумма расстояний от произвольной точки до концов *секундных* стрелок больше, чем сумма расстояний до центров часов. Верно?

– Да, согласен.

– Рассмотрим этот момент, а также момент ровно через полчаса. Обрати внимание: положения *секундных* стрелок всех часов в оба момента одни и те же! Так что для них утверждение теоремы сохраняется. А для минутных хотя бы в один из этих двух моментов сумма расстояний до концов *минутных* стрелок больше суммы расстояний до центров часов. То есть мы выловили момент, когда утверждение справедливо и для секундных, и для минутных стрелок. Ну, а теперь «подключим» и часовые стрелки, рассмотрев этот последний найденный нами момент, а также тот, который наступит ровно через 6 часов. Положения секундных и минутных стрелок будут прежними (и для них всё останется в силе), а для часовых стрелок хотя бы в один из этих двух моментов тоже станет выполнено нужное требование. Всё!

...Оставим на этом наших собеседников. Обратим лучше внимание на одну неувязку в их рассуждениях. Доказывая неравенство для минутных стрелок, Федя предположил, что «для каждых часов мы получим картинку, похожую на рисунок 1». Но точки B_1 и C_1 могут попасть на луч AM_1, и тогда мы не сможем применить теорему о медиане. В этом случае неравенство неверно и превращается в равенство. Если такое совпадение случится у всех часов, то неравенство в задаче Феди не будет выполнено. Можно было бы заменить в формулировке и решениях Фединых задач строгие неравенства «больше» менее категоричными «больше или равно» (или по-другому говоря, «не меньше»). Разница вроде бы невелика, но всё-таки не хотелось бы отступать с завоёванного рубежа. Подумайте: нельзя ли спасти задачу? Если не сумеете, посмотрите ответ на с. 30.

Художник Ольга Демидова