Математический кружок

ГЕОМЕТРИЯ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

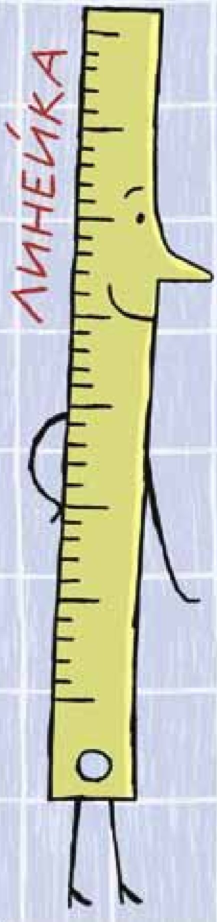
ЧАСТЬ 1

Александр Блинков

Такая геометрия – с одной стороны, необычная, а с другой – вполне обыкновенная. Необычная – потому, что все фигуры будут изображаться на «клеточках», а обычная – потому, что для рассуждений потребуется воображение и знание основных фактов школьного курса геометрии (как правило, на уровне 7 класса).

Предлагаемые задачи по большей части выбраны из различных олимпиад и придуманы серьёзными авторами. Несколько задач взяты из книжки «Задачи на вырост» замечательного математика Вячеслава Викторовича Произволова. Всё это говорит о том, что геометрические задачи на клетчатой бумаге достойны отдельного разговора!

Начнём с задач на построение. На клетчатой бумаге для их решения обычно хватает одного инструмента – линейки, причем без делений, так как при построениях мы можем использовать «узлы» квадратной сетки.



ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Факт 1. Угол на рисунке 1 равен 90°.

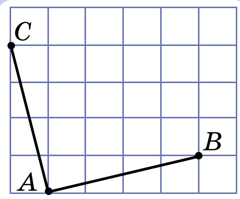


Рис. 1

Доказательство. Заметим, что AB и AC – диагонали равных прямоугольников размера 1×4 клетки. Повернём прямоугольник с диагональю AB вокруг точки A на 90° против часовой стрелки. Он, очевидно, перейдёт в прямоугольник с диагональю AC, которая совместится с диагональю AB. Значит, до поворота угол между этими диагоналями был 90°.

Подобный факт останется верным, если вместо прямоугольников 1×4 взять равные прямоугольники любых размеров.

Факт 2. AD – биссектриса угла BAC на рисунке 2.

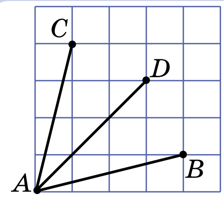


Рис. 2

Доказательство. Заметим, что отрезки AD и CB перпендикулярны (они проходят через диагонали клетки с вершиной в точке D), причём их точка пересечения делит отрезок CB пополам (на два отрезка длиной в полторы диагонали клетки). Значит, если перегнуть лист бумаги по отрезку AD, то точки B и C совместятся (говорят, что точки B и C *симметричны* относительно прямой AD). Ясно, что и углы BAD и CAD при этом совместятся, то есть они равны, и AD – биссектриса угла BAC.

Задача 1 (*В. Смирнов*). Используя только линейку без делений, постройте центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 3а).

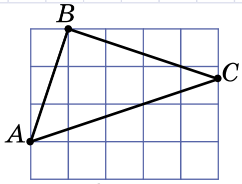


Рис. 3а

Напомним, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.

Решение. Для построения центра вписанной окружности достаточно построить биссектрисы двух углов треугольника. Совсем несложно построить биссектрису угла A: отметим узел K и соединим его отрезком с вершиной A. Аналогично доказательству факта 2, точки B и D симметричны относительно AK, и поэтому луч AK является биссектрисой угла BAD (рис. 3б).

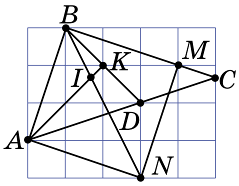


Рис. 3б

Чтобы использовать похожую идею ещё раз, заметим, что угол ABC – прямой. Тогда отметим на стороне BC точку M так, чтобы отрезки BM и BA были равны, после чего, используя также узел N, построим квадрат $ABMN$. Его диагональ BN будет биссектрисой угла B.

Точка I пересечения отрезков AK и BN – искомая.

Узлы на сетке позволяют в некоторых случаях обойтись вообще без инструментов.

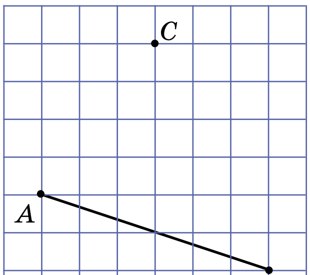


Рис. 4а

Задача 2 (*А. Блинков*). Отметьте на чертеже (рис. 4а) точку, симметричную точке C относительно прямой AB. Ответ обоснуйте.

Найти искомую точку, скорее всего, несложно, но ведь надо ещё обосновать…

Ответ: точка D (рис. 4б, в).

Решение. Напомним, что точка D будет симметрична точке C относительно AB, если прямая AB – серединный перпендикуляр к отрезку CD. Чтобы это доказать, соединим точки C и D

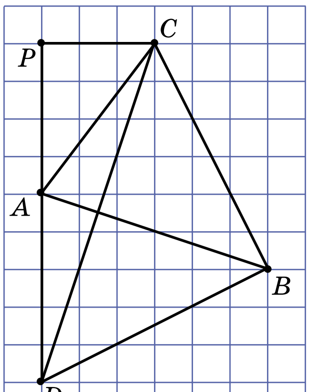
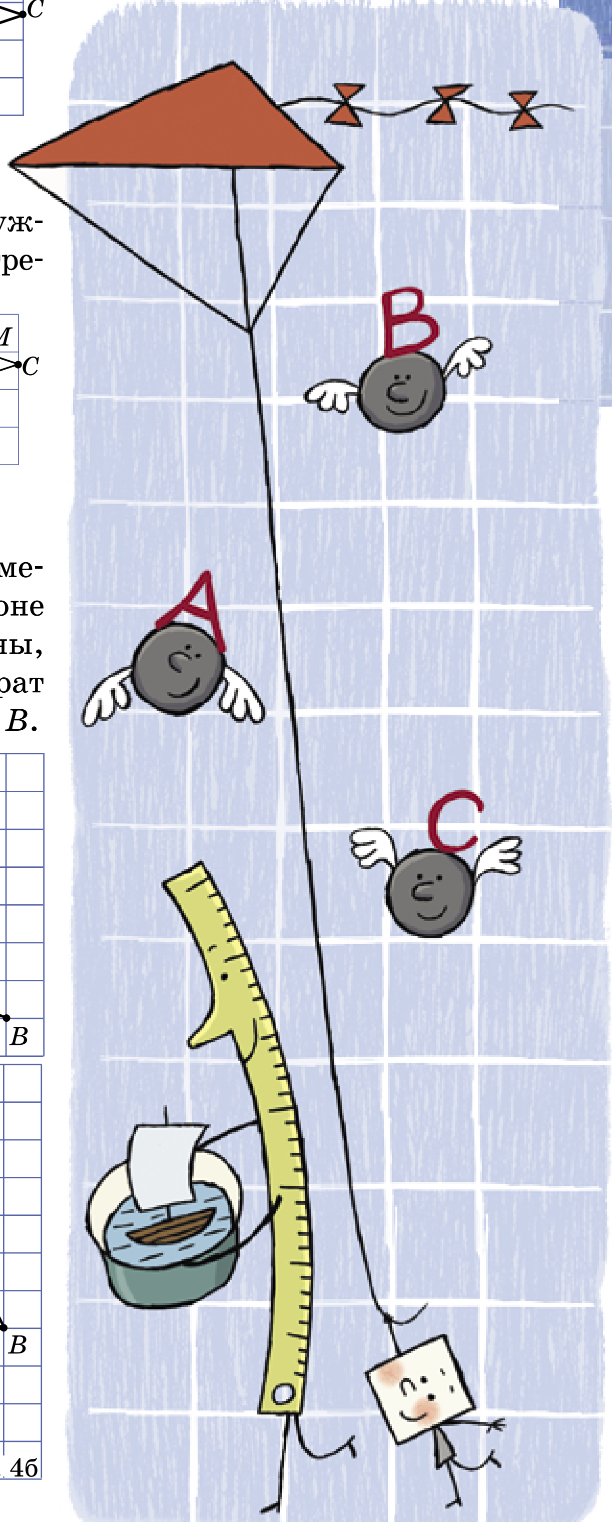


Рис. 4б



с концами отрезка AB (рис. 4б). Заметим, что $AC = 5$ (по теореме Пифагора для треугольника ACP). Следовательно, треугольники ABC и ABD равны (по трём сторонам), поэтому равны углы CAB и DAB.

Таким образом, биссектриса треугольника CAD, проведённая из вершины A, является его высотой и медианой, значит, AB – серединный перпендикуляр к отрезку CD.

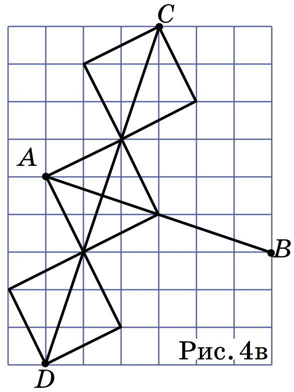


Рис. 4в

Те из вас, кто ещё не знаком с теоремой Пифагора, могут решить задачу по-другому, построив три вспомогательных квадрата на рис. 4в.

Обратите внимание, что задача 2 на самом деле не задача на построение, а задача «на доказательство». И таких задач «на клеточках» также немало.

Задача 3 (*В. Произволов*). Не выходя за пределы листа размера 3×3, докажите равенство красного и зелёного углов (рис. 5а).

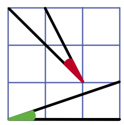


Рис. 5а

Понятно, что равные углы наверняка найдутся в равных треугольниках, но таких здесь не видно. Но если нет равных треугольников, то, может быть, найдутся хотя бы подобные?

Решение. Построим два прямоугольных треугольника (рис. 5б). В каждом из них отношение большего катета к меньшему равно 3, то есть эти треугольники подобны. Следовательно, равны их соответствующие углы – красный и зелёный.

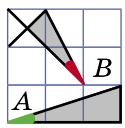


Рис. 5б

Как мы уже видели в задаче 2, в задачах «на клеточках» возможны и вычисления, причём проделать их не всегда просто. Как правило, такие задачи возникают при рассмотрении прямоугольных треугольников, прямоугольников или квадратов.

Задача 4 (*В. Произволов*). Найдите угол AKM (рис. 6а).

Сначала попробуем «угадать» ответ. В «клеточных» задачах, как правило, вариантов немного и ответ всегда «хороший». Похоже, что искомый *угол равен 45°. А такой угол возникает в прямоугольном равнобедренном треугольнике. Значит, требуются дополнительные построения, которые позволят заменить искомый угол на ему равный, но расположенный более удобно. Помимо равенства треугольников (применение которого мы уже разбирали), в таких случаях часто помогает параллельность.*

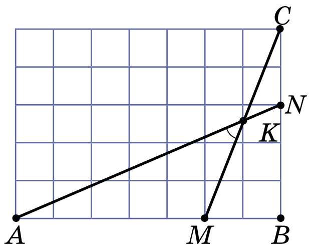


Рис. 6а

Ответ: 45°.

Решение. Проведём AE параллельно CM (рис. 6б). Тогда $\angle AKM = \angle EAN$. Так как треугольник AEN – прямоугольный и равнобедренный, то $\angle EAN = 45°$, то есть $\angle AKM = 45°$.

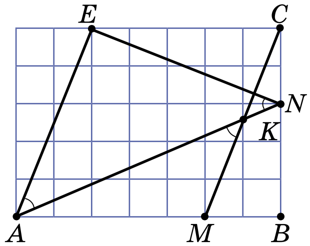


Рис. 6б

Очень красивы задачи, в которых вычислить отдельные углы невозможно, но можно вычислить сумму нескольких углов.

Задача 5 (*В. Произволов*, заочный конкурс «Математика 6–8» журнала «Квант»). Найдите сумму пяти углов: MAN, MBN, MCN, MDN и MEN (рис. 7а)

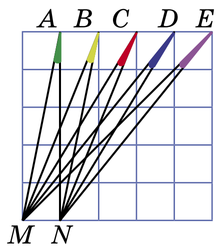


Рис. 7а

В таких случаях надо попытаться «состыковать» все углы, сумму которых надо найти, то есть расположить их так, чтобы они имели общую вершину, а соседние углы – общую сторону.

Ответ: 45°.

Решение. Перенесём углы вправо так, чтобы их вершина оказалась в точке E: угол MAN – на 4 клетки, угол MBN – на 3, угол MCN – на 2, а угол MDN – на одну клетку (рис. 7б). Тогда сумма пяти углов будет равна углу MEK, то есть равна 45°.

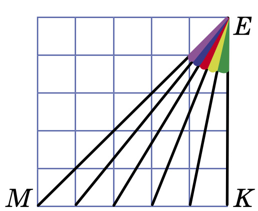
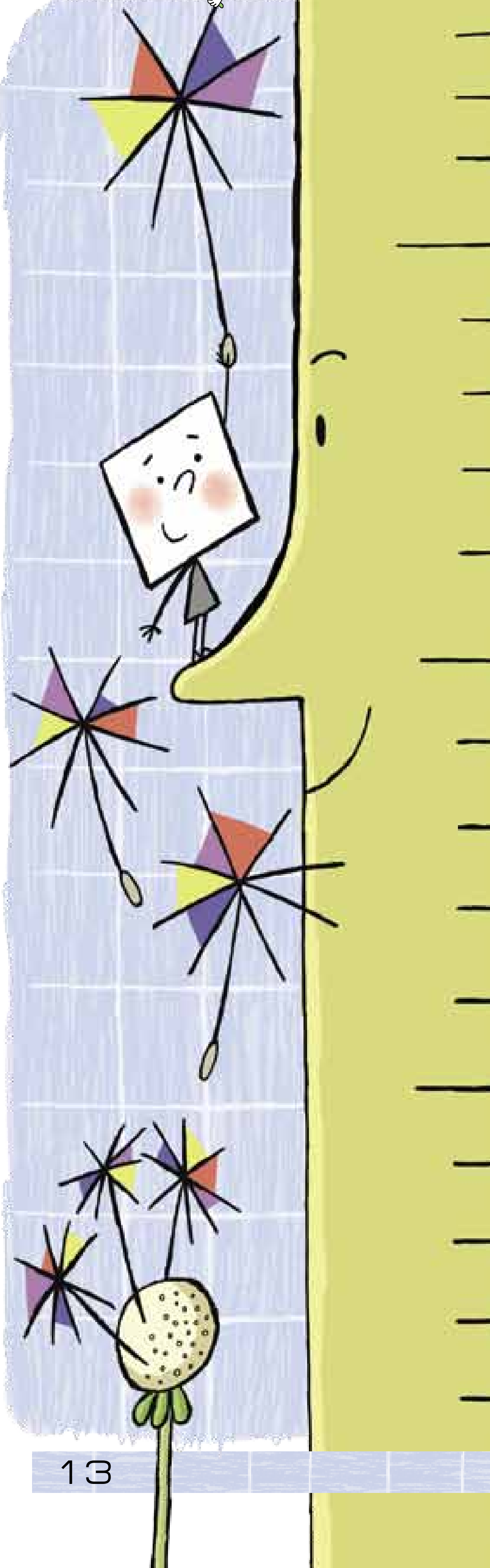


Рис. 7б



Разговор о более сложных задачах «на клеточках» мы ещё продолжим, а пока – задачи для самостоятельного решения.

Задача 6 Используя только линейку без делений, постройте центр окружности, проходящей через точки A, B и C (рис. 8).

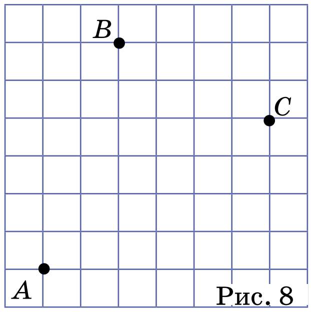


Рис. 8

Задача 7 (*Р.Гордин*, X Математический праздник). Постройте какой-нибудь треугольник, две медианы которого взаимно перпендикулярны.

Задача 8 (*Д.Прокопенко*, XVII турнир матбоёв имени А.П.Савина). Найдите угол между прямыми AE и DQ (рис. 9).

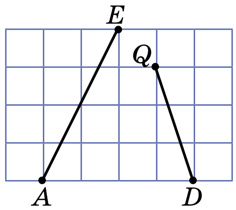


Рис. 9

Задача 9 (*В.Произволов*). Докажите, что углы MAN и BPM равны (рис. 10).

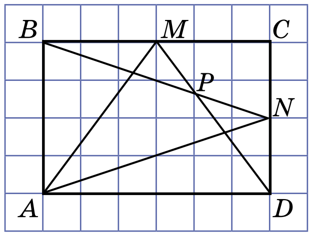


Рис. 10

Задача 10. Найдите сумму трёх углов, обозначенных на рисунке 11.

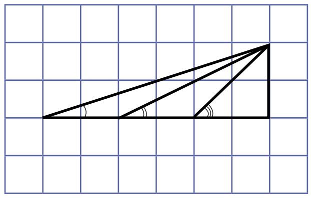


Рис. 11

Задача 11 (*В.Произволов*). От квадрата $ABCD$ отрезали прямоугольный треугольник MND (рис. 12). Найдите сумму трёх углов, под которыми из вершин A, B и C видна его гипотенуза.

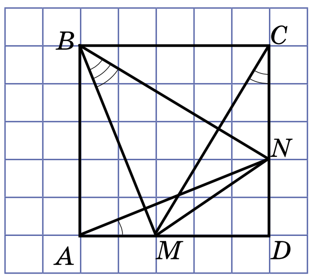


Рис. 12

Художник Инга Коржнева